

Combinando jogos simultâneos e sequenciais

Roberto Guena de Oliveira

USP

15 de setembro de 2011

Sumário

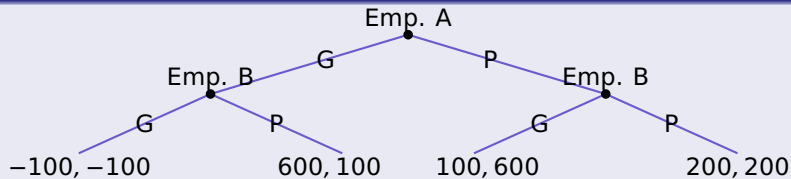
- 1 **Representações nas formas estratégicas e extensiva**
- 2 **Jogos sequenciais e estratégias mistas**
- 3 **Mudando as regras**
 - Convertendo jogos sequenciais em simultâneos
 - Convertendo um jogo de simultâneo para sequencial
- 4 **Solução do jogo sequencial na forma estratégica**
- 5 **Equilíbrio perfeito de subjogos**

Sumário

- 1 Representações nas formas estratégicas e extensiva**
- 2 Jogos sequenciais e estratégias mistas
- 3 Mudando as regras
- 4 Solução do jogo sequencial na forma estratégica
- 5 Equilíbrio perfeito de subjogos

Jogo sequencial na forma estratégica

Representação na forma extensiva



Representação na forma estratégica

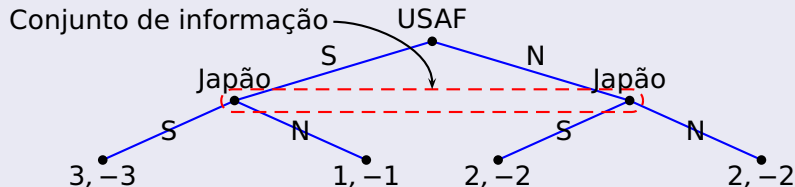
		Empresa B			
		GG	GP	PG	PP
Emp. A	G	$-100, -100$	$-100, -100$	$600, 100$	$600, 100$
	P	$100, 600$	$200, 200$	$100, 600$	$200, 200$

Jogo simultâneo na forma extensiva

Representação estratégica

		Marinha Japonesa	
		Norte	Sul
USAF	Norte	2	2
	Sul	1	3

Representação extensiva



Um jogo com movimentações simultâneas e sequeciais

Duas empresas, Kumquat e Kiwifruit, competem com produtos similares em um jogo de duas rodadas. Na primeira rodada, elas devem decidir simultaneamente se fazem um gasto grande (G) ou pequeno (P) em P&D. Na segunda rodada, com informação sobre o que cada uma delas fez na primeira rodada, elas decidem simultaneamente se praticam preço alto (A) ou baixo (B).

Sumário

- 1 Representações nas formas estratégicas e extensiva
- 2 Jogos sequenciais e estratégias mistas**
- 3 Mudando as regras
- 4 Solução do jogo sequencial na forma estratégica
- 5 Equilíbrio perfeito de subjogos

Exemplo 1: futebol americano

O time que ataca precisa ganhar 20 jardas em dois Down's restantes. O técnico do ataque tem duas jogadas para essa situação: uma que avançará 10 jardas se bem sucedida e outra que resultará em um avanço de 20 jardas, se bem sucedida. Ele deve escolher a jogada de cada down. Sabendo disso, o técnico da defesa deve escolher, simultaneamente, se seu time se prepara para defender a jogada de 10 jardas ou a jogada de 20 jardas.

Exemplo 1 (continuação...)

Probabilidades de sucesso

		Defesa	
		10	20
Ataque	10	$\frac{4}{5}$	1
	20	1	$\frac{1}{2}$

Exemplo 1 (continuação...)

Quarto down com 20 jardas faltando

Payoffs esperado do ataque

		Defesa	
		10	20
Ataque	10	0	0
	20	1	$\frac{1}{2}$

Equilíbrio de Nash

- Ataque joga 20
- Defesa joga 20
- Payoff esperado para Ataque = $\frac{1}{2}$.

Exemplo 1 (continuação...)

Quarto down com 10 jardas faltando

Payoff esperado para o ataque

		Defesa	
		10	20
Ataque	10	$\frac{4}{5}$	1
	20	1	$\frac{1}{2}$

Equilíbrio de Nash

- Ataque joga 10 com probabilidade $\frac{5}{7}$.
- Defesa joga 10 com probabilidade $\frac{5}{7}$.
- Payoff esperado do ataque é $\frac{6}{7}$.

Exemplo 1 (*continuação...*): Terceiro down

Payoff esperado para o ataque

		Defesa	
		10	20
Ataque	10	$\frac{11}{14}$	$\frac{6}{7}$
	20	1	$\frac{3}{4}$

Equilíbrio de Nash

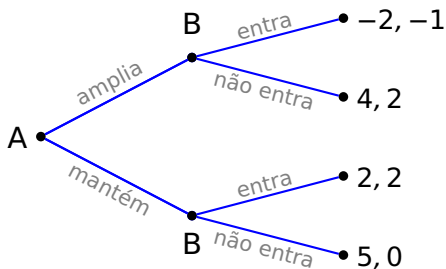
- Ataque joga 10 com probabilidade $\frac{7}{9}$
- Defesa joga 10 com probabilidade $\frac{1}{3}$
- Payoff esperado do ataque é $\frac{1}{3}$

Sumário

- 1 Representações nas formas estratégicas e extensiva
- 2 Jogos sequenciais e estratégias mistas
- 3 Mudando as regras**
 - Convertendo jogos sequenciais em simultâneos
 - Convertendo um jogo de simultâneo para sequencial
- 4 Solução do jogo sequencial na forma estratégica
- 5 Equilíbrio perfeito de subjogos

Exemplo 2

- A empresa A é a única vendedora em determinado mercado e deve decidir se amplia ou mantém sua capacidade produtiva.
- A empresa B cogita em entrar nesse mercado e deve tomar sua decisão após observar a decisão da empresa A.



- Equilíbrio por reversão: empresa A amplia e empresa B não entra.

Exemplo 3 (*continuação...*): o mesmo jogo com movimentos simultâneos

		Empresa B	
		entra	não entra
Empresa A	amplia	-2, -1	4, 2
	mantém	2, 2	5, 0

- manter é estratégia dominante para empresa A.
- o equilíbrio de Nash ocorre quando a empresa A mantém a capacidade e a empresa B entra.

Sumário

1 Representações nas formas estratégicas e extensiva

2 Jogos sequenciais e estratégias mistas

3 **Mudando as regras**

- Convertendo jogos sequenciais em simultâneos
- Convertendo um jogo de simultâneo para sequencial

4 Solução do jogo sequencial na forma estratégica

5 Equilíbrio perfeito de subjogos

Exemplo 4

Vimos que o jogo

		Empresa B	
		entra	não entra
Empresa A	amplia	-2, -1	4, 2
	mantém	2, 2	5, 0

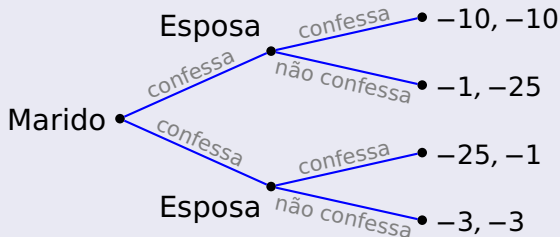
tem, como equilíbrio de Nash, (mantém, entra). Porém, caso a empresa A movimente-se primeiro, o equilíbrio por reversão será (amplia, (não entra, entra)). É vantagem para a empresa A mover primeiro.

Exemplo 5

Dilema dos prisioneiros

		Esposa	
		Confessa	Não confessa
Marido	Confessa	-10, -10	-1, -25
	Não Confessa	-25, -1	-3, -3

Jogo quando o marido joga primeiro



Sumário

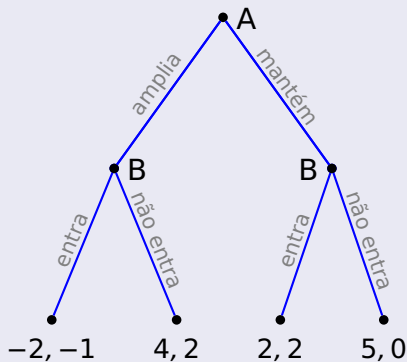
- 1 Representações nas formas estratégicas e extensiva
- 2 Jogos sequenciais e estratégias mistas
- 3 Mudando as regras
- 4 Solução do jogo sequencial na forma estratégica**
- 5 Equilíbrio perfeito de subjogos

Princípio geral

- Considere um jogo sequencial.
- Como, na solução reversa, o último jogador escolhe a estratégia que dá a melhor resposta para cada possível movimentação dos outros jogadores, sabemos que, nessa solução, o último jogador **nunca** joga uma estratégia dominada.
- Analogamente, por solução reversa, o penúltimo jogador nunca jogará uma estratégia dominada após a eliminação das estratégias dominadas do último jogador, etc.
- Assim, o equilíbrio por reversão é obtido ao se eliminar recursivamente estratégias dominadas, em ordem reversa, do último ao primeiro jogador.

Exemplo 6

Forma extensiva



Estratégias

Empresa A

amplia : (A)

mantém : (M)

Empresa B

entra e entra : (EE)

entra e não entra : (EF)

não entra e entra : (FE)

não entra e não entra : (FF)

Exemplo 6 (continuação): Forma estratégica

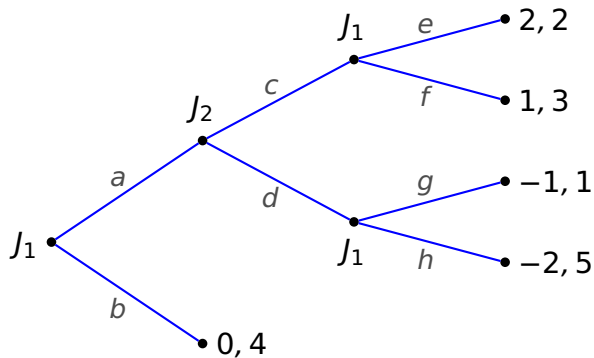
		Empresa B			
		EE	EF	FE	FF
Empresa A	Amplia	-2, -1	-2, -1	4, 2	4, 2
	Mantém	2, 2	5, 0	2, 2	5, 0

Exercício

Considere um jogo igual ao do exemplo 6 com exceção do fato de que a primeira empresa a se mover é a empresa B.

- 1 Represente esse jogo na forma extensiva e encontre o equilíbrio por reversão.
- 2 Represente esse jogo na forma estratégica e encontre o equilíbrio por reversão através da eliminação sucessiva de estratégias dominadas.

Exemplo 7



Exemplo 7 (continuação): representação estratégica

		J_2	
		c	d
J_1	a, eg	2, 2	-1, 1
	a, eh	2, 2	-2, 5
	a, fg	1, 3	-1, 1
	a, fh	1, 3	-2, 5
	b, eg	0, 4	0, 4
	b, eh	0, 4	0, 4
	b, fg	0, 4	0, 4
	b, fh	0, 4	0, 4

Exemplo 7 (continuação): forma reduzida

		J_2	
		c	d
J_1	a, eg	2, 2	-1, 1
	a, eh	2, 2	-2, 5
	a, fg	1, 3	-1, 1
	a, fh	1, 3	-2, 5
	e	0, 4	0, 4

Sumário

1 Representações nas formas estratégicas e extensiva

2 Jogos sequenciais e estratégias mistas

3 Mudando as regras

- Convertendo jogos sequenciais em simultâneos
- Convertendo um jogo de simultâneo para sequencial

4 Solução do jogo sequencial na forma estratégica

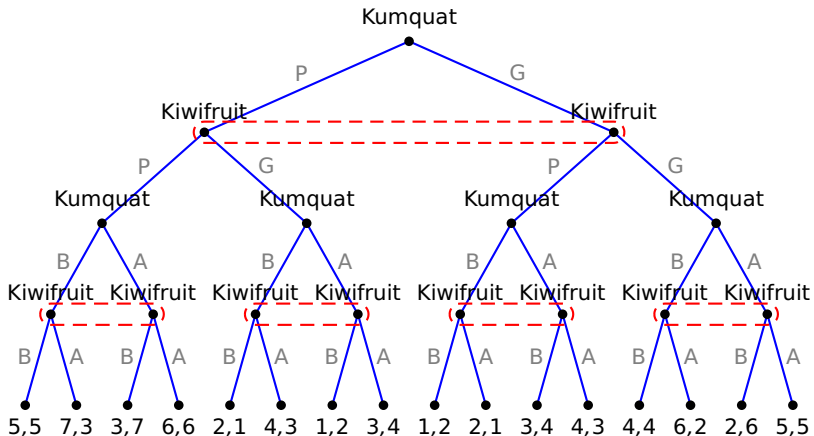
5 **Equilíbrio perfeito de subjogos**

Subjogos

Um subjogo é uma parte de um jogo na forma extensiva que:

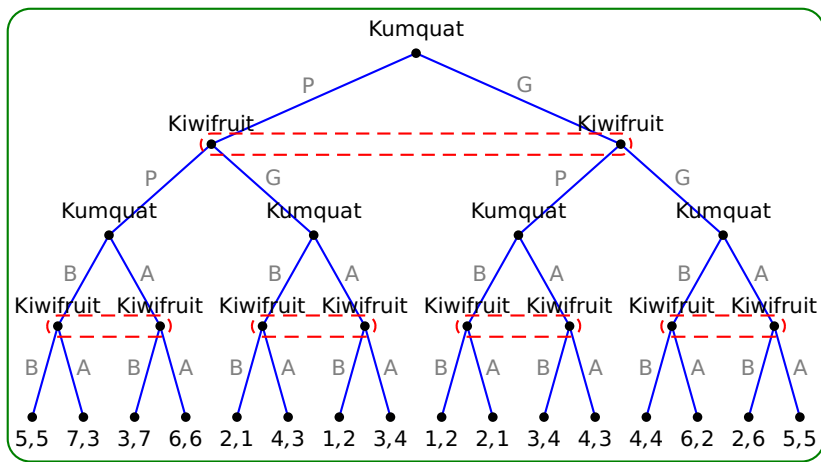
- 1 Começa em um nó decisório que é o único elemento do conjunto de informação ao qual pertence.
- 2 Contém todos os nós que sucedem qualquer um de seus nós.
- 3 Caso dois nós pertençam ao mesmo conjunto de informação e um dos nós pertence ao subjogo, então o outro nó também pertence ao subjogo.

Exemplo 8



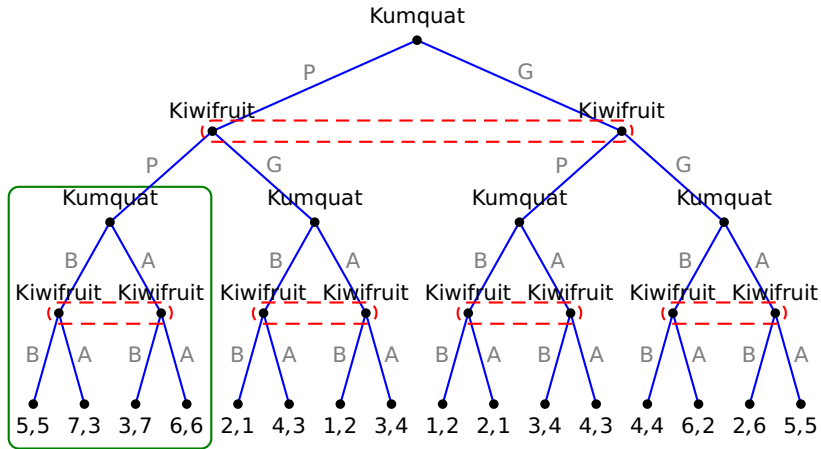
Exemplo 8

Subjogo 1



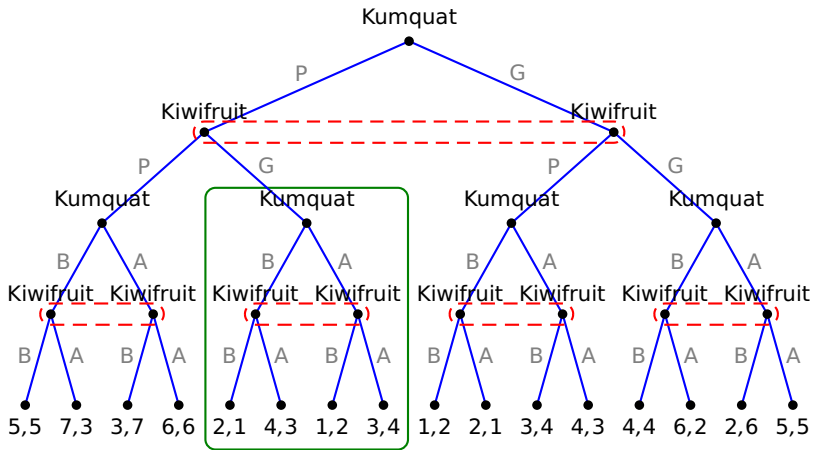
Exemplo 8

Subjogo 2



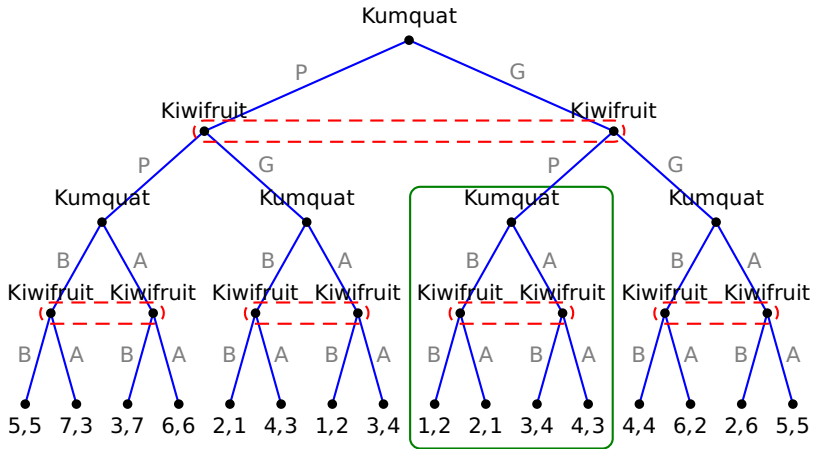
Exemplo 8

Subjogo 3



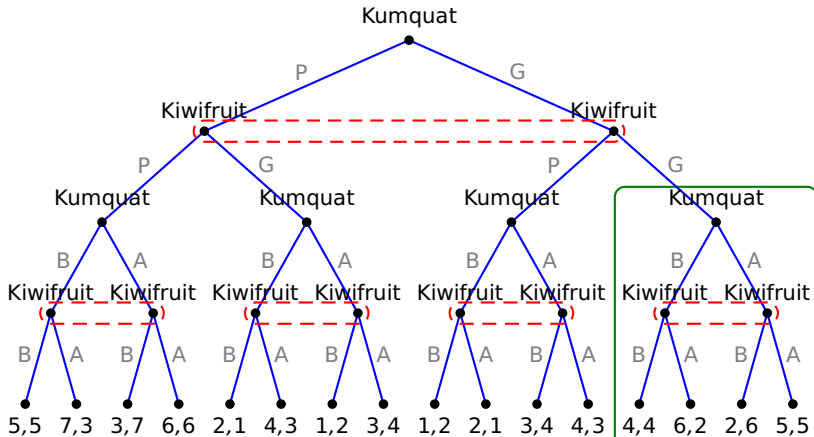
Exemplo 8

Subjogo 4



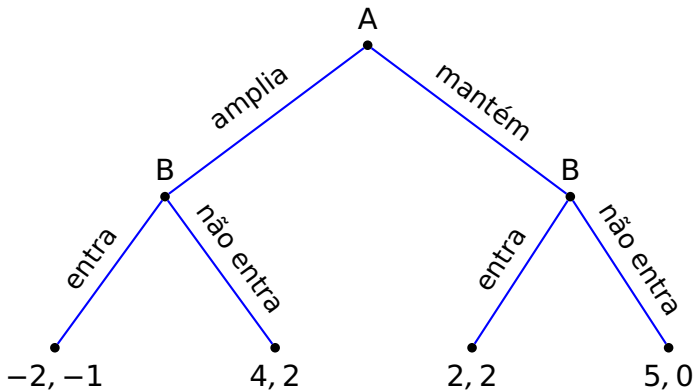
Exemplo 8

Subjogo 5



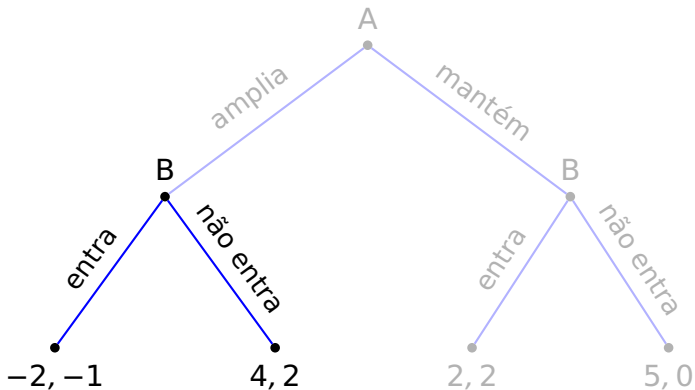
Exemplo 9

O jogo é um subjogo de si mesmo



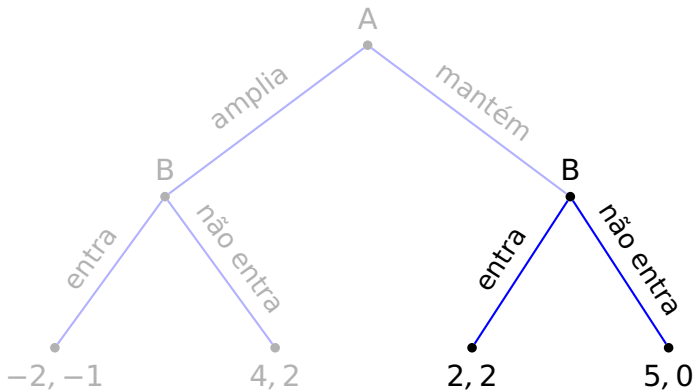
Exemplo 9

Segundo subjogo



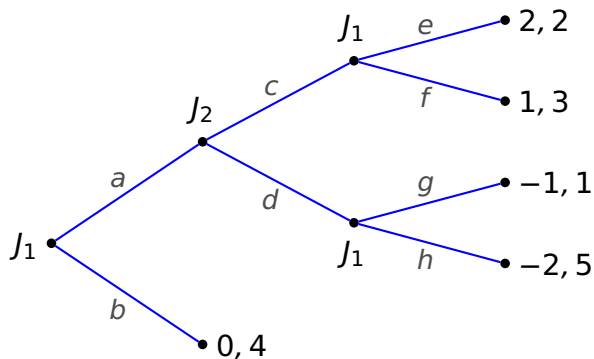
Exemplo 9

Terceiro e último subjogo



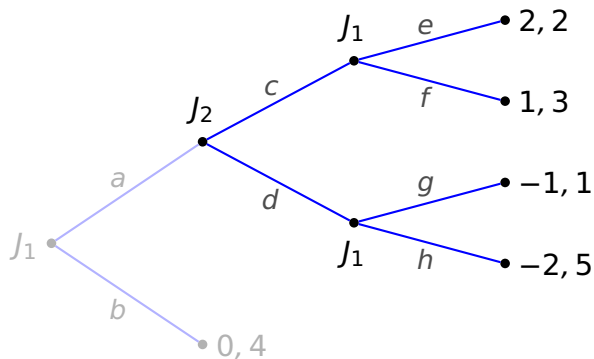
Exemplo 10

Primeiro subjogo – o jogo inteiro



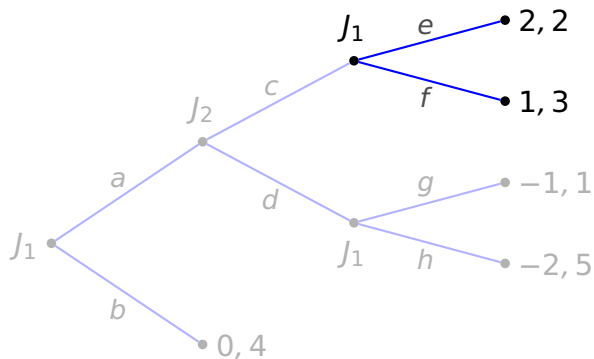
Exemplo 10

Segundo subjogo



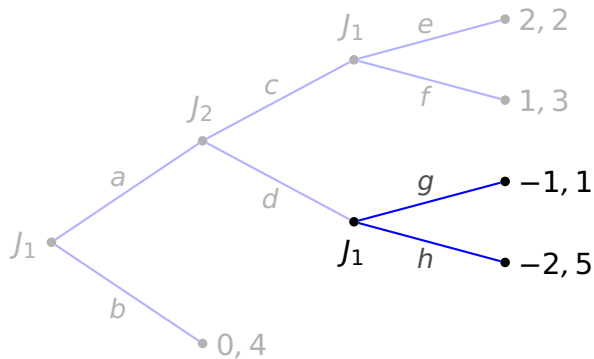
Exemplo 10

Terceiro subjogo



Exemplo 10

Quarto subjogo



Continuação de uma estratégia

Definição

A continuação de uma estratégia em um subjogo é o plano de ação definido por essa estratégia nesse subjogo.

Exemplo 10

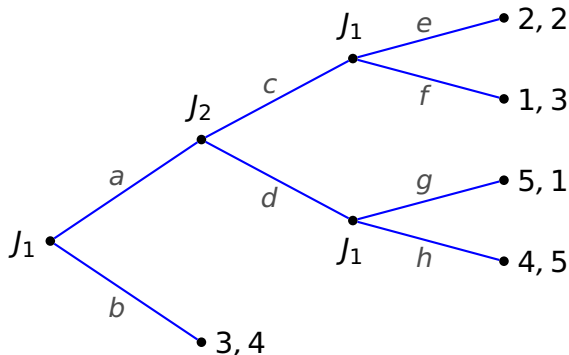
- No exemplo 7 continuação da estratégia a, eg no subjogo que tem início caso J_1 jogue a é eg .
- No mesmo exemplo, a continuação da mesma estratégia no subjogo que tem início após J_1 jogar a e J_2 jogar c é e .
- No exemplo 7 continuação da estratégia a, eg no subjogo que tem início caso J_1 jogue a é eg .

Equilíbrio de Nash perfeito em subjogos

Um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos de um jogo é uma combinação de estratégias tal que, a combinação de continuações dessas estratégias em cada subjogo do jogo, define, nesse subjogo, um equilíbrio de Nash.

Exercício

Encontre o perfil de estratégias correspondente ao equilíbrio de Nash perfeito em subjogos no jogo abaixo.



Resposta: J_1 joga b, eg e J_2 joga c .