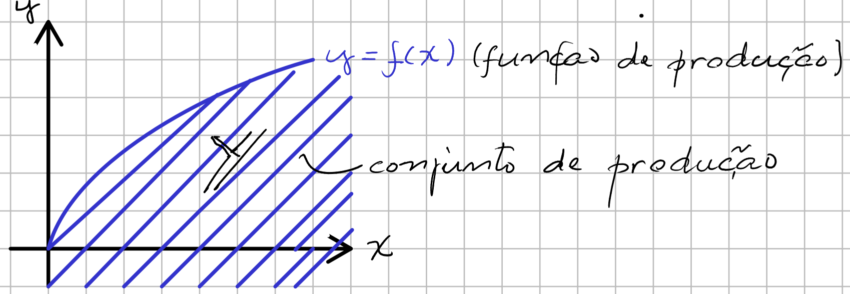
Produção:

* Vetor de produção liquida
* Conjunto de produção
* produção tecnicamente eficiente
* função de produção
* Isoquantas
* Hipóteses usuais
* Medidas de produtividade
* Taxa técnica de substituição
* Rendimentos de escala
* Curto e longo prazos
* Rendimentos marginais decrescentes

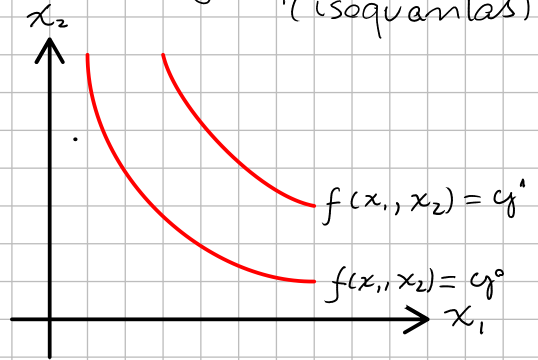
Empresa com um único produto:

· plano de produção: y, x

Exemplo: um único insumo



Exemplo: curvas de nível da função de produção (2 insumos)
(isoquantas)



Medidas de produtividade dos insumos de produção

Produtividade média ou produto médio de um insumo

$$PM_i = \frac{y}{x_i} = \frac{f(x)}{x_i} \qquad PM_1 = \frac{f(x_1, x_2)}{x_1} \qquad PM_2 = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2}$$

$$PM = \frac{f(x)}{x}$$

Produtividade marginal ou produto marginal de um insumo

$$PMg_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \qquad PMg = \frac{d f(x)}{d x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$PMg_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

Interpretação: PMg_i diz, aproximadamente, de quanto cresce a produção qdo. 1 unidade adicional de i é empregada.

Relação entre PM_i e PMg_i

$$\underline{\underline{PM_i}} = \frac{f(x)}{x_i}$$

$$\frac{\partial PM_i}{\partial x_i} = \frac{d\,\frac{f(x)}{x_i}}{d x_i} = \frac{\overbrace{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}^{PMg_i} x_i - \overbrace{f(x)}}{x_i^2} = \frac{PMg_i - PM_i}{\underbrace{x_i}_{>0}}$$

$PMg_i > PM_i \Rightarrow \frac{\partial PM_i}{\partial x_i} > 0 \Rightarrow PM_i$ será crescente em relação a x_i.

$PMg_i < PM_i \Rightarrow \frac{\partial PM_i}{\partial x_i} < 0 \Rightarrow PM_i$ será decrescente em relação a x_i

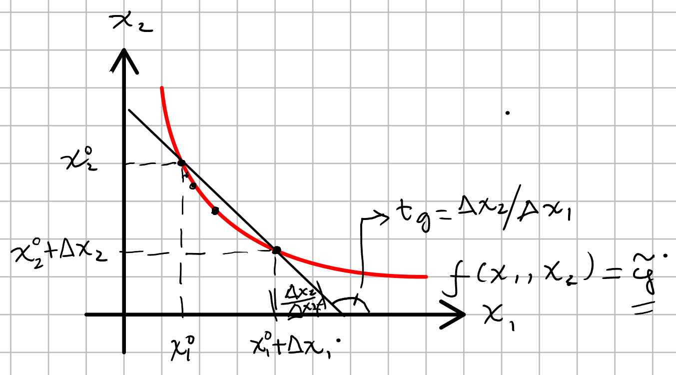
$PMg_i = PM_i \Rightarrow$ ponto de sela, pto de máximo ou pto de mínimo.

Assumindo que $f(0, \dots, x_n) = 0$

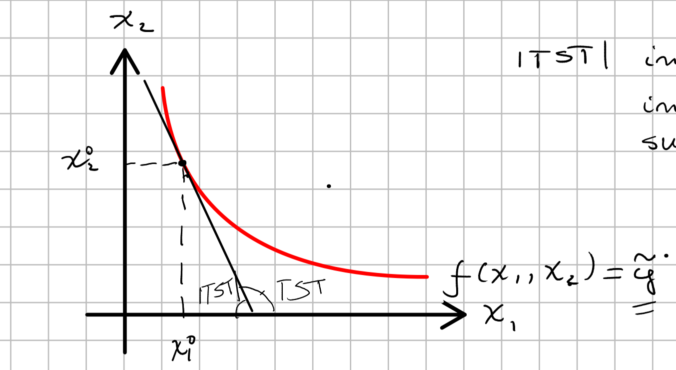
$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_1} = \frac{f(x_1, \dots, x_n) - f(0, \dots, x_n)}{x_1} =$$

$$\frac{\partial f(0, \dots, x_n)}{\partial x_1} = PMg_1(0, \dots, x_n)$$

Taxa técnica de substituição ou taxa marginal de subst. técnica



$\left|\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right|$ = unidades do insumo 2 substituídas por um adicional do insumo 1.



$|TST|$ indica quantas unidades do insumo 2 são necessárias para substituir 1 unidade do insumo 1.

Taxa de substituição técnica e produtividade marginal:

$f(x_1, x_2) = \tilde{y}$ define x_2 como função implícita de x_1. .

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} = 0 \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2} = -\frac{PMg_1}{PMg_2}$$

$$TST = -\frac{PMg_1}{PMg_2} \qquad |TST| = \frac{PMg_1}{PMg_2}$$

Exemplos:

a) $f(x_1, x_2) = A x_1^a x_2^b$

$$PMg_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}(A x_1^a x_2^b) = aA x_1^{a-1} x_2^b$$

$$PMg_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}(A x_1^a x_2^b) = bA x_1^a x_2^{b-1}$$

$$TST = -\frac{PMg_1}{PMg_2} = \frac{a \cancel{A} x_1^{a-1} \cancel{x_2^b}}{b \cancel{A} \cancel{x_1^a} x_2^{b-1}} = -\frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1}$$

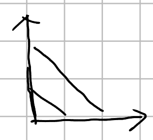
b) $f(x_1, x_2) = A\left[a x_1^{\rho} + (1-a) x_2^{\rho}\right]^{1/\rho}$ (CES) $0 < a < 1$

$$PMg_1 = \frac{A}{\rho}\left[a x_1^{\rho} + (1-a) x_2^{\rho}\right]^{\frac{1-\rho}{\rho}} a \rho x_1^{\rho-1}$$

$$PMg_2 = \frac{A}{\rho}\left[a x_1^{\rho} + (1-a) x_2^{\rho}\right]^{\frac{1-\rho}{\rho}} (1-a) \rho x_2^{\rho-1}$$

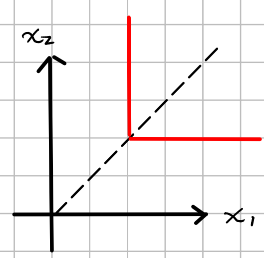
$$TST = -\frac{PMg_1}{PMg_2} = -\frac{a}{1-a}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1} = -\frac{a}{1-a}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho}$$

$\rho = 1 \Rightarrow TST = -1$

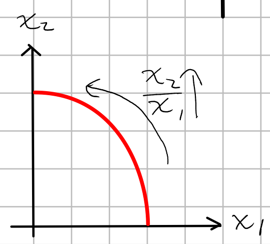


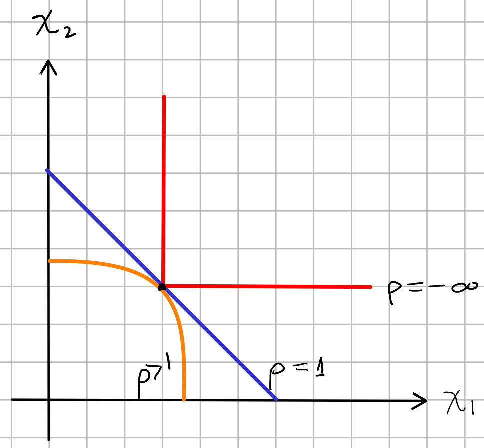
$\rho = 0 \Rightarrow TST = -\frac{a}{1-a} \frac{x_2}{x_1}$

$$\lim_{\rho \to -\infty} |TST| = \begin{cases} \infty & \text{se } x_2/x_1 > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < \frac{x_2}{x_1} < 1 \end{cases}$$



$\rho > 1$ $|TST| = \frac{a}{1-a}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\overbrace{1-\rho}^{<0}}$



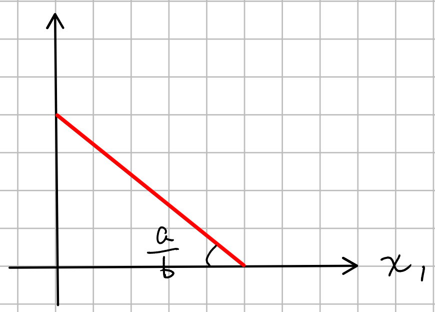


c) $f(x_1, x_2) = g(ax_1 + bx_2)$ Substitutos perfeitos na produção

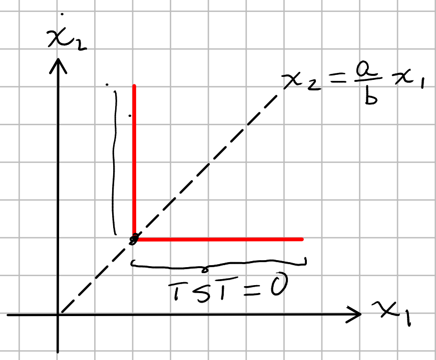
$PMg_1 = a g'(ax_1 + bx_2)$

$PMg_2 = b g'(ax_1 + bx_2)$

$\Longrightarrow$ $TST = -\dfrac{a}{b}$



d) $f(x_1, x_2) = A \min\{ax_1, bx_2\}$ Função de produção de Leontief.



$$TST = \begin{cases} 0 & \text{caso } x_2 < \frac{a}{b} x_1 \\ \text{indefinida} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resumo

$PM_i = \dfrac{f(x)}{x_i}$

$PMg_i = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$

$PMg_i \gtreqless PM_i \Rightarrow$ PM_i crescente
PM_i decrescente
PM_i máx, min ou pto de sela

$\underline{\underline{TST}} = -\dfrac{PMg_1}{PMg_2}$.

Função CES: $f(x_1, x_2) = A[a x_1^{\rho} + (1-a) x_2^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}$ $\leftarrow$ $0 < a < 1$

$\rho \to 0 \Rightarrow$ Cobb Douglas $\quad$ $\rho = 1 \Rightarrow$ <u>subst. perf.</u> $\quad$ $\rho \to -\infty \Rightarrow$ <u>Leontief</u>: