Lucro

Roberto Guena de Oliveira

9 de setembro de 2020

USP

Sumário

Sumário

Sumário

O conceito de lucro

Lucro em um modelo estástico

$$\pi = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{m} w_i x_i$$

π é o lucro da empresa.

n é o número de produtos da empresa.

p_i é o preço do i-ésimo produto da empresa.

y_i é a quantidade produzida do i-ésimo produto.

m é o número de insumos da empresa.

w_i é o custo de oportunidade unitário do i-ésimo insumo.

x_i é a quantidade empregada do i-ésimo insumo.

Lucro em um modelo dinâmico com T períodos.

$$\pi = \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+r)^t} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^t y_i^t - \sum_{i=1}^{m} w_i^t x_i^t \right)$$

r é a taxa de juros.

p_i^t é o preço do produto i no período t.

y_i^t é a produção do produto i no período t.

w_i^t é o custo de oportunidade unitário do insumo i no período t.

x_i^t é o emprego do insumo i no período t.

Maximização de lucro com um único produto: colocação do problema

Maximizar

$$\pi = py - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

dadas as restrições

$$y \leq f(x_1, \ldots, x_n)$$
$$y, x_1, \ldots, x_n \geq 0$$

O problema – versão 2

Maximizar

$$\pi = pf(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

dada a restrição

$$x_1, \ldots, x_n \geq 0$$

Condições necessárias de primeira ordem

Solução interior
na escolha ótima, caso $x_i > 0$

$$p\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = w_i \quad \text{isto é,} \quad pPMg_i = w$$

Solução de canto
na escolha ótima, caso $x_i = 0$

$$p\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \leq w_i \quad \text{isto é,} \quad pPMg_i \leq w_i$$

Condições necessárias de 1ª ordem – interpretação

- $pPMg_i$ é o valor do produto marginal do fator i.
- Caso $pPMg_i > w_i$ vale a pena contratar uma unidade adicional desse fator pois o acréscimo à receita, $pPMg_i$, será superior ao acréscimo ao custo, w_i.
- Caso $pPMg_i < w_i$ vale a pena contratar uma unidade adicional desse fator pois a perda de receita, $pPMg_i$, será inferiror à redução no custo, w_i.

Condição de lucro máximo de segunda ordem

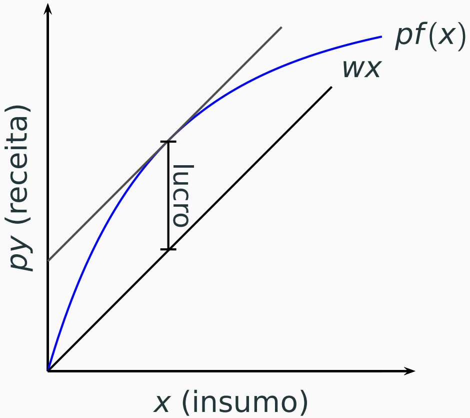
Na escolha ótima, caso o nível de produção seja positivo a função $pf(x_1, \ldots, x_n) - \sum w_i x_i$ dever ser localmente côncava. Isso implica, entre outras coisas que

$$\frac{\partial^2 f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i^2} \leq 0,$$

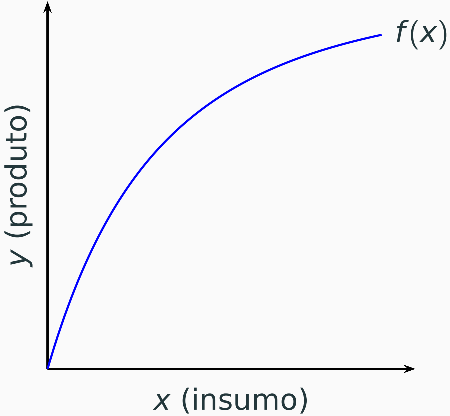
isto é,

$$\frac{\partial PMg_i}{\partial x_i} \leq 0$$

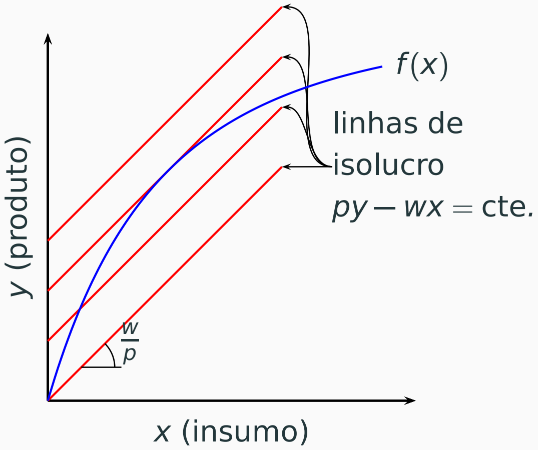
Maximização de lucro – interpretação gráfica I



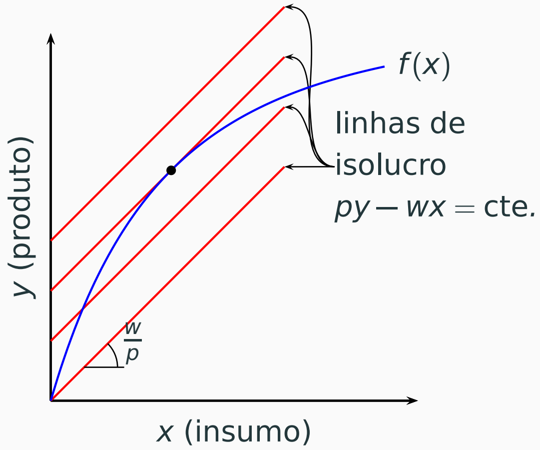
Maximização de lucro – interpretação gráfica II



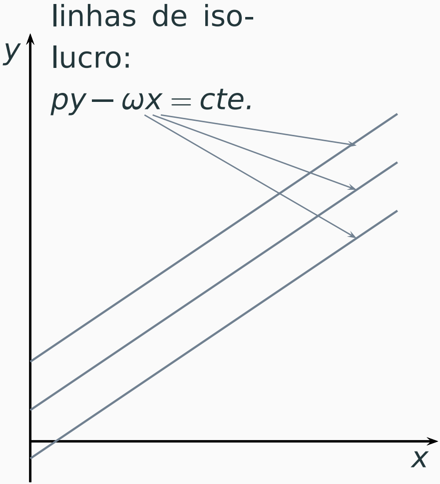
Maximização de lucro – interpretação gráfica II



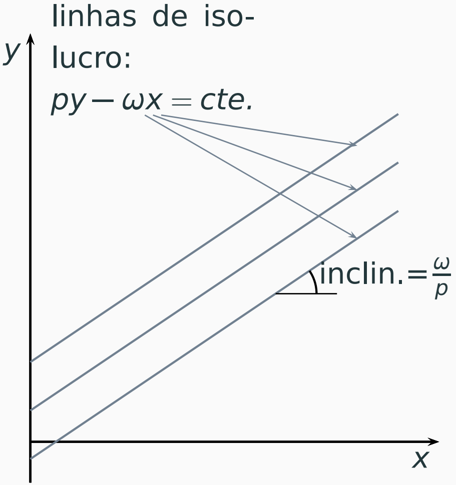
Maximização de lucro – interpretação gráfica II



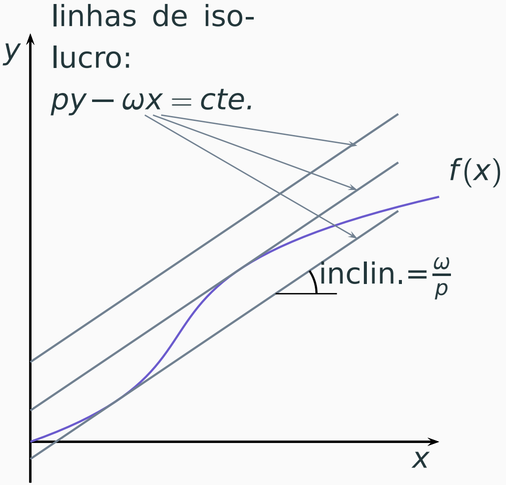
Condição de segunda ordem – interpretação gráfica



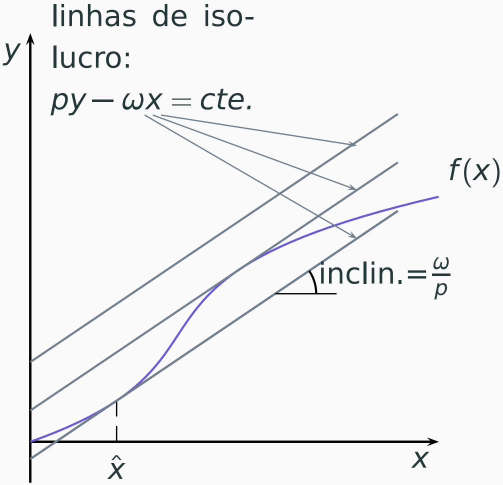
Condição de segunda ordem – interpretação gráfica



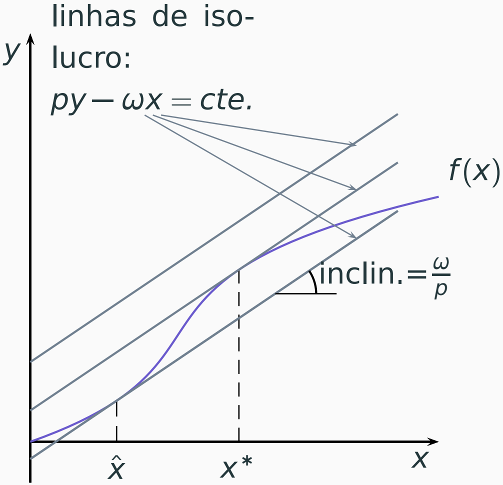
Condição de segunda ordem – interpretação gráfica



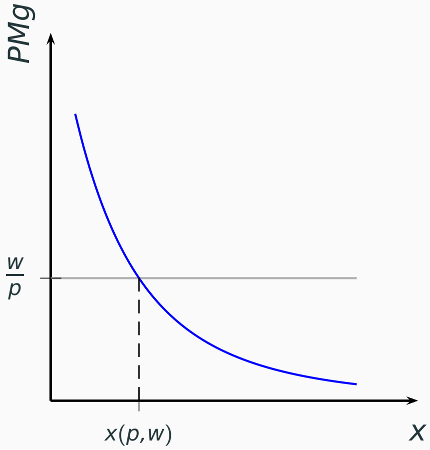
Condição de segunda ordem – interpretação gráfica



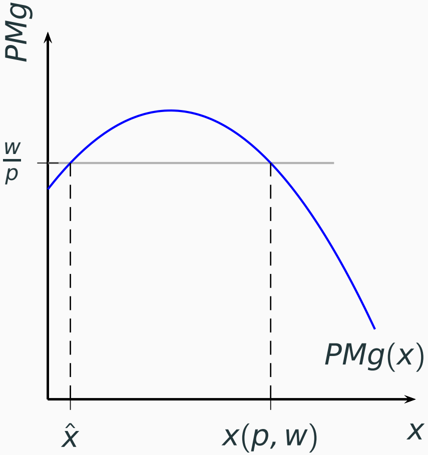
Condição de segunda ordem – interpretação gráfica



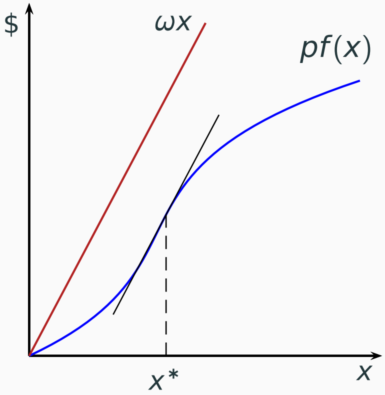
A curva de demanda por um fator de produção



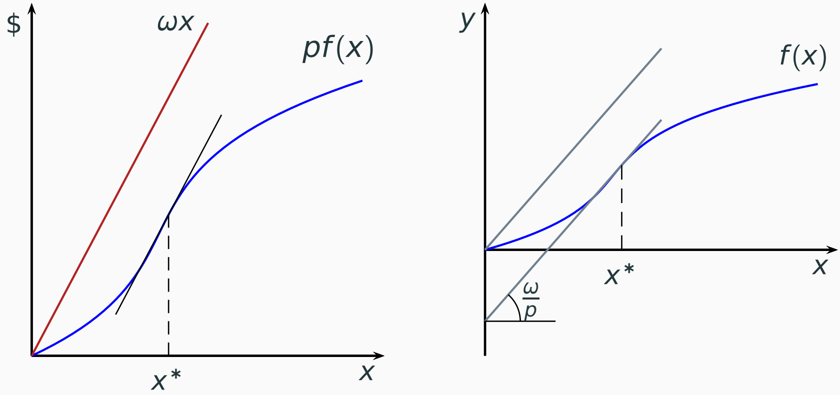
Condição de segunda ordem – nova interpretação gráfica



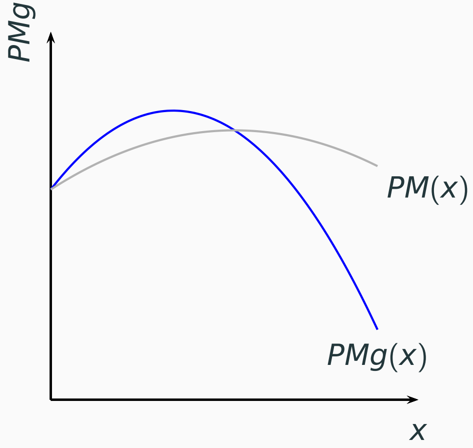
Inatividade



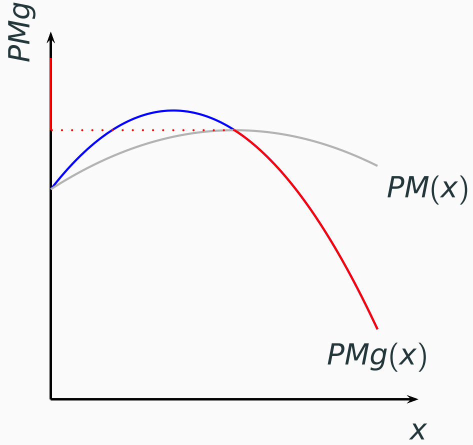
Inatividade



A curva de demanda pelo fator de produção revisitada



A curva de demanda pelo fator de produção revisitada



Funções de demanda de insumos, de oferta e de lucro

Demandas pelos insumos de produção

Seja $x_i(p, \omega_i, \ldots, \omega_n)$ uma função que retorna a quantidade empregada do insumo i quando o lucro da empresa é máximo. Essa função é chamada de função de demanda do insumo i

Funções de demanda de insumos, de oferta e de lucro

Demandas pelos insumos de produção
Seja $x_i(p, \omega_i, \ldots, \omega_n)$ uma função que retorna a quantidade empregada do insumo i quando o lucro da empresa é máximo. Essa função é chamada de função de demanda do insumo i

Função de oferta
A função de oferta de uma empresa $y(p, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ é a função que retorna o valor da função de produção quando o lucro é máximo.

Funções de demanda de insumos, de oferta e de lucro

Demandas pelos insumos de produção
Seja $x_i(p, \omega_i, \ldots, \omega_n)$ uma função que retorna a quantidade empregada do insumo i quando o lucro da empresa é máximo. Essa função é chamada de função de demanda do insumo i

Função de oferta
A função de oferta de uma empresa $y(p, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ é a função que retorna o valor da função de produção quando o lucro é máximo.

Função de lucro
A função de lucro de uma empresa $\pi(p, \omega_i, \ldots, \omega_n)$ é uma função que retorna o valor do lucro máximo dessa empresa dados os preços $p, \omega_i, \ldots, \omega_n$.

Propriedades da função de lucro

Propriedades da função de lucro

- A função de lucro é não decrescente em relação ao preço do produto e não crescente em relação aos preços dos fatores.

Propriedades da função de lucro

- A função de lucro é não decrescente em relação ao preço do produto e não crescente em relação aos preços dos fatores.
- A função de lucro é convexa em relação ao preço de seu produto e em relação ao preço dos fatores de produção.

Propriedades da função de lucro

- A função de lucro é não decrescente em relação ao preço do produto e não crescente em relação aos preços dos fatores.
- A função de lucro é convexa em relação ao preço de seu produto e em relação ao preço dos fatores de produção.
- Lema de Hotelling:

$$\frac{\partial \pi(p, \omega_1, \ldots, \omega_n)}{\partial \omega_i} = -x_i(p, \omega_1, \ldots, \omega_n)$$

$$\frac{\partial \pi(p, \omega_1, \ldots, \omega_n)}{\partial p} = y(p, \omega_1, \ldots, \omega_n)$$

Exemplo 1

A função de produção

$$f(x) = 100x - x^2$$

Exemplo 1

A função de produção

$$f(x) = 100x - x^2$$

Demanda pelo insumo de produção

$$PMg = \frac{\omega}{p}$$

Exemplo 1

A função de produção

$$f(x) = 100x - x^2$$

Demanda pelo insumo de produção

$$PMg = \frac{\omega}{p} \Rightarrow 100 - 2x = \frac{\omega}{p}$$

Exemplo 1

A função de produção

$$f(x) = 100x - x^2$$

Demanda pelo insumo de produção

$$PMg = \frac{\omega}{p} \Rightarrow 100 - 2x = \frac{\omega}{p} \Rightarrow x(p,\omega) = 50 - \frac{\omega}{2p}$$

Exemplo 1

A função de produção

$$f(x) = 100x - x^2$$

Demanda pelo insumo de produção

$$PMg = \frac{\omega}{p} \Rightarrow 100 - 2x = \frac{\omega}{p} \Rightarrow x(p, \omega) = 50 - \frac{\omega}{2p}$$

A função de oferta

$$y(p, \omega) = f(x(p, \omega))$$

Exemplo 1

A função de produção

$$f(x) = 100x - x^2$$

Demanda pelo insumo de produção

$$PMg = \frac{\omega}{p} \Rightarrow 100 - 2x = \frac{\omega}{p} \Rightarrow x(p,\omega) = 50 - \frac{\omega}{2p}$$

A função de oferta

$$\begin{aligned} y(p,\omega) &= f(x(p,\omega)) \\ &= 100\left(50 - \frac{\omega}{2p}\right) - \left(50 - \frac{\omega}{2p}\right)^2 \end{aligned}$$

Exemplo 1

A função de produção

$$f(x) = 100x - x^2$$

Demanda pelo insumo de produção

$$PMg = \frac{\omega}{p} \Rightarrow 100 - 2x = \frac{\omega}{p} \Rightarrow x(p, \omega) = 50 - \frac{\omega}{2p}$$

A função de oferta

$$\begin{aligned} y(p, \omega) &= f(x(p, \omega)) \\ &= 100\left(50 - \frac{\omega}{2p}\right) - \left(50 - \frac{\omega}{2p}\right)^2 = 2.500 - \frac{\omega^2}{4p^2} \end{aligned}$$

Exemplo – continuação

A função de lucro

$$\pi(p,\omega) = py(p,\omega) - \omega x(p,\omega)$$

Exemplo – continuação

A função de lucro

$$\pi(p,\omega) = py(p,\omega) - \omega x(p,\omega)$$

Exemplo – continuação

A função de lucro

$$
\begin{aligned}
\pi(p,\omega) = py(p,\omega) - \omega x(p,\omega) \\
= p\left(2.500 - \frac{\omega^2}{4p^2}\right) - \omega\left(50 - \frac{\omega}{2p}\right) \\
= 2.500p - 50\omega + \frac{\omega^2}{4p}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

Encontre as funções de oferta, de demanda pelos fatores de produção e de lucro e verifique o lema de Hotelling:

1. $f(x_1, x_2) = 3\sqrt[3]{x_1 x_2}$.
2. $f(x_1, x_2) = 2\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)$.
3. $f(x_1, x_2) = \ln(x_1 + 1) + \ln(x_2 + 1)$.
4. $f(x_1, x_2) = \min\left\{\sqrt{x}_1, \sqrt{x}_2\right\}$.
5. $f(x_1, x_2) = \ln(x_1 + x_2)$.

Lucratividade revelada

Lucratividade revelada

Sejam

$$y^0 = y(p^0, w_1^0, w_2^0),\ x_1^0 = x_1(p^0, w_1^0, w_2^0),\ x_2^0 = x_2(p^0, w_1^0, w_2^0)$$
$$y^1 = y(p^1, w_1^1, w_2^1),\ x_1^1 = x_1(p^1, w_1^1, w_2^1),\ x_2^1 = x_2(p^1, w_1^1, w_2^1)$$

Então:

$$p^0 y^0 - w_1^0 x_1^0 - w_2^0 x_2^0 \geq p^0 y^1 - w_1^0 x_1^1 - w_2^0 x_2^1$$
$$p^1 y^1 - w_1^1 x_1^1 - w_2^1 x_2^1 \geq p^1 y^0 - w_1^1 x_1^0 - w_2^1 x_2^0$$

Ou, somando as duas desigualdades,

$$\underbrace{(y^1 - y^0)}_{\Delta y}\underbrace{(p^1 - p^0)}_{\Delta p} - \underbrace{(x_1^1 - x_1^0)}_{\Delta x_1}\underbrace{(w_1^1 - w_1^0)}_{\Delta w_1} - \underbrace{(x_2^1 - x_2^0)}_{\Delta x_2}\underbrace{(w_2^1 - w_2^0)}_{\Delta w_2} \geq 0$$

Lucratividade revelada

Sejam

$$y^0 = y(p^0, w_1^0, w_2^0),\ x_1^0 = x_1(p^0, w_1^0, w_2^0),\ x_2^0 = x_2(p^0, w_1^0, w_2^0)$$
$$y^1 = y(p^1, w_1^1, w_2^1),\ x_1^1 = x_1(p^1, w_1^1, w_2^1),\ x_2^1 = x_2(p^1, w_1^1, w_2^1)$$

Então:

$$p^0y^0 - w_1^0x_1^0 - w_2^0x_2^0 \geq p^0y^1 - w_1^0x_1^1 - w_2^0x_2^1$$
$$p^1y^1 - w_1^1x_1^1 - w_2^1x_2^1 \geq p^1y^0 - w_1^1x_1^0 - w_2^1x_2^0$$

Ou, somando as duas desigualdades,

$$(\underbrace{y^1 - y^0}_{\Delta y})(\underbrace{p^1 - p^0}_{\Delta p}) - (\underbrace{x_1^1 - x_1^0}_{\Delta x_1})(\underbrace{w_1^1 - w_1^0}_{\Delta w_1}) - (\underbrace{x_2^1 - x_2^0}_{\Delta x_2})(\underbrace{w_2^1 - w_2^0}_{\Delta w_2}) \geq 0$$

Lucratividade revelada

Sejam

$$y^0 = y(p^0, w_1^0, w_2^0),\ x_1^0 = x_1(p^0, w_1^0, w_2^0),\ x_2^0 = x_2(p^0, w_1^0, w_2^0)$$
$$y^1 = y(p^1, w_1^1, w_2^1),\ x_1^1 = x_1(p^1, w_1^1, w_2^1),\ x_2^1 = x_2(p^1, w_1^1, w_2^1)$$

Então:

$$p^0 y^0 - w_1^0 x_1^0 - w_2^0 x_2^0 \geq p^0 y^1 - w_1^0 x_1^1 - w_2^0 x_2^1$$
$$p^1 y^1 - w_1^1 x_1^1 - w_2^1 x_2^1 \geq p^1 y^0 - w_1^1 x_1^0 - w_2^1 x_2^0$$

Ou, somando as duas desigualdades,

$$(\underbrace{y^1 - y^0}_{\Delta y})(\underbrace{p^1 - p^0}_{\Delta p}) - (\underbrace{x_1^1 - x_1^0}_{\Delta x_1})(\underbrace{w_1^1 - w_1^0}_{\Delta w_1}) - (\underbrace{x_2^1 - x_2^0}_{\Delta x_2})(\underbrace{w_2^1 - w_2^0}_{\Delta w_2}) \geq 0$$

$$\Delta y \Delta p - \Delta x_1 \Delta w_1 - \Delta x_2 \Delta w_2 \geq 0$$