UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto – Departamento de Economia

REC0224 – MICROECONOMIA II – EXERCÍCIOS SOBRE TEORIA DOS JOGOS E OLIGOPÓLIO.

ROBERTO GUENA DE OLIVEIRA

1) Duas empresas produzem um bem homogêneo e são as únicas ofertantes desse bem em um mercado no qual a função de demanda inversa é dada por $p = 100 - (y_1 + y_2)$ na qual y_1 é a quantidade de produto ofertada pela empresa 1 e y_2 é a quantidade de produto ofertada pela empresa 2. As duas empresas produzem com custo médio constante, sendo que o custo médio da empresa 1 é $c_1 = 1$ e o custo médio da empresa 2 é $c_2 = 2$. Pede-se
   a) Quanto cada empresa produzirá em um modelo de Cournot?
   b) Quanto cada empresa produzirá em um modelo de Stackelberg?
   c) No último caso, pode-se dizer que a empresa 1 detém o monopólio do mercado?

2) Duas empresas são as únicas demandantes de mão-de-obra em uma pequena cidade. As empresas são tomadoras de preço no mercado de seu produto e possuem a mesma tecnologia que gera um valor do produto marginal do trabalho constante e igual a R$ 3.000,00 mensais. A curva de oferta de trabalho na cidade é dada por $L = W$ na qual L é a quantidade ofertada de trabalho e W é o salário mensal. Se cada empresa decidir quanto deve contratar de mão-de-obra tamando a quantidade produzida pela outra como um dado, qual deve ser a quantidade total de mão-de-obra contratada no equilíbrio de Nash? Qual deve ser o salário nesse equilíbrio?

3) João e Maria participam de um jogo no qual estão em disputa R$10.000,00. Nesse jogo, cada um deles deve escolher simultaneamente um número real positivo qualquer. Notemos por x_J o número escolhido por João e por x_M, o número escolhido por Maria. Caso $x_J = \sqrt{x_M}$, João receberá um prêmio igual ao menor valor entre $5.000x_J$ e 10.000 reais. Caso contrário, ele não ganhará prêmio algum. Já Maria será contemplada com o valor de R$10.000 menos um eventual prêmio pago a João caso ela escolha $x_M = x_J$. Caso $x_M \neq x_J$, o prêmio de Maria será nulo. Considerando que cada um dos jogadores está unicamente interessado no prêmio que vai receber, pergunta-se:
   a) Quantos equilíbrios de Nash há nesse jogo?
   b) Quais são esses equilíbrios?
   c) Se houver mais de um equilíbrio, algum deles é mais provável? Explique.

4) Um mercado é dividido entre duas empresas, que produzem um bem homogêneo. Esse mercado opera de acordo com o modelo de liderança preço. A empresa líder tem uma função de custo dada por $c_\ell = 2y_\ell$ na qual y_ℓ é a quantidade produzida pela empresa líder. A função de custo da empresa seguidora é $C_s = 2y_s^2$. A função de demanda pelo produto das duas empresas é $x = 102 - \frac{3}{4}p$ na qual

x é a quantiade demandada. Encontre as quantidades a serem produzidas por empresa e o preço anunciado pela empresa líder.

5) Considere o seguinte jogo com dois jogadores: vinte e um palitos são dispostos sobre uma mesa. Em cada rodada, um jogador deve retirar entre um e três palitos de sobre a mesa. O jodadores devem jogar de modo alternado. Assim, na primeira rodada, o jogador 1 deve retirar de um a três palitos, na segunda rodada, o mesmo deve ser feito pelo jogador 2, na terceira rodada, o jogador 1 deve novamente retirar entre um e três palitos, e assim por diante. O jogo acaba quando todos os palitos forem retirados da mesa e perde o jogo o jogador que retirar o último palito. Você é capaz de, aplicando o princípio da indução retroativa, prever que jogador deve vencer o jogo? Descreva a estratégia a ser adotada por esse jogador.

6) O jogo abaixo é repetido infinitas vezes. Seja δ^* o menor fator de desconto intertemporal que permite implementar a lista de estratégias Pareto-eficientes como equilíbrio perfeito de subjogo, em que a não-cooperação é punida com a não cooperação para sempre. Encontre δ^*.

		Jogador 2	
		coopera	não coopera
Jogador 1	coopera	1 , 1	−1 , 2
	não coopera	2 , −1	0 , 0

7) Duas empresas são as únicas fornecedoras de um produto homogêneo em um determinado mercado. A função de demanda anual por esse produto é dada pela expressão $p = 3600 - {}^{(y_1+y_2)}/_2$ na qual p é o preço de demanda e y_1 e y_2 são os produtos anuais das empresas 1 e 2, respectivamente. As duas empresas produzem de acordo com a função de custo $c_i(y_i) = {}^{y_i^2}/_2$. Qual deve ser a taxa de desconto máxima para que um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos seja obtido quando as duas empresas escolhem a seguinte estratégia: iniciar produzindo a quantidade de cartel e, a cada ano, continuar produzindo essa quantidade caso a outra empresa empresa faça o mesmo, ou produzir a quantidade correspondente a um equilíbrio de Cournot, caso a outra empresa produza mais que a quantidade de cartel em, ao menos, um ano?

8) O Golfo de MBola na Nangila é uma das regiões mais piscosas do globo. Visando apropiar-se de parte dos ganhos com a atividade altamente rentável que é a pesca nesse golfo, o governo da Nangila estabeleceu que, para ter acesso ao golfo, cada embarcação deverá pagar uma taxa anual de ŋ1.000 (ŋ é o símbulo para a moeda local, o *ngobo*). A guarda costeira de MBola é responsável por patrulhar o golfo e cobrar a taxa acrescida de uma multa de ŋ4.000 sobre cada embarcação que seja pega pescando sem ter recolhido a taxa anual de acesso. Essa patrulha é, contudo custosa. A guarda costeira estima que o custo de abordar um barco e verificar se seu proprietário pagou ou não a taxa requerida é de ŋ200. Em virtude desse custo, apenas uma parcela dos barcos que pescam no golfo é abordada. Suponha que a guarda costeira deseje maximizar o ganho líquido para o governo de MBola, ou seja a diferença entre a soma da receita com recolhimento de taxas mais a receita com cobrança de multas menos o custo de patrulha (ŋ200

por navio abordado). Suponha também que os proprietários das embarcações de pesca se preocupem exclusivamente em minimizar o valor esperado com o pagamento de taxas e multas. Nesse contexto, empregue o conceito de equilíbrio de Nash em estratégias mistas para determinar que percentual das embarcações de pesca no golfo de MBola deve ser fiscalizado e que percentual dessas embarcações optará por não pagar previamente a taxa de acesso.

9) Um jogador de futebol deve cobrar um penalty. Suponha que ele tenha apenas duas estratégias: chutar a bola no lado direito do gol ou chutar a bola no lado esquerdo do gol. O goleiro não tem tempo para determinar de que lado o jogador chutará a bola. Assim, ele deve escolher para que lado pular sem saber qual será a direção do chute. Suponha que, sempre que o goleiro adivinhe corretamente o lado do chute, ele seja capaz de fazer a defesa. O batedor possui um tiro certeiro quando chuta no lado direito, mas não é tão bom quando chuta do lado esquerdo. Se o batedor chutar do lado direito do gol e o goleiro pular para o lado esquerdo, a bola entrará com 100% de certeza. Se o batedor chutar do lado esquerdo do gol e o goleiro pular para o lado direito, a bola entrará no gol com uma probabilidade de 50%. Encontre o equilíbrio de Nash em estratégias mistas desse jogo.

SOLUÇÕES – EXERCÍCIOS SELECIONADOS.

6) A combinação de estratégias Pareto eficiente ocorre quando os dois jogadores cooperam. Suponha que um dos jogadores anuncie que iniciará o jogo cooperando, continuará cooperando enquanto o outro jogador também o fizer, e deixará de cooperá para sempre caso o outro jogador deixe de cooperar uma única vez. Nesse caso, o outro jogador deve decidir o que vale mais: não cooperar e obter um *payoff* igual a 2 na primeira rodada e, em virtude da punição do primeiro jogador, obter *payoffs* iguais a zero nas rodadas subsequentes, ou cooperar para sempre e obter, em cada rodada, a partir da primeira rodada, *payoffs* iguais a 1. Sendo δ o fator de desconto desse jogador, temos que, o valor presente da opção de começar o jogo não cooperando é 2. Já o valor presente da opção de cooperar para sempre é

$$1+\delta+\delta^2+\ldots=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\delta^n=\frac{1}{1-\delta}$$

O menor valor de δ para o qual a opção de cooperar não é inferior à de não cooperar é aquele que faz com que o ganho da cooperação seja igual ao ganho da não cooperação, isto é

$$2=\frac{1}{1-\delta}$$

Resolvendo essa equação para δ encontramos o valor de δ^*: $\delta^*=\frac{1}{2}$.

7) Para resolver esse exercício, precisamos inicialmente encontrar os lucros anuais correspondentes a três cenários:
   7.1 – As duas empresas produzem de acordo com o modelo de Cournot.
   7.2 – As duas empresas produzem de acordo com um regime de Cartel, maximizando a soma de seus lucros.

7.3 – Uma das empresas, digamos a empresa 1, trai a outra, isto é, produz a quantidade que maximiza seu lucro enquanto a outra produz a quantidade de monopólio.

Equilíbrio de Cournot. Para determinar o equilíbrio de Cournot, devemos encontrar as funções de reação de cada empresa. Comecemos com a empresa 1. Seu lucro é dado por

$$\pi_1 = \left(3600 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) y_1 - \frac{y_1^2}{2}$$

Encontramos a função de reação dessa empresa achando, em função de y_2, o valor de y_1 que maximiza esse lucro. A condição de primeira ordem de lucro máximo é:

$$3600 - \frac{y_2}{2} - 2y_1 = 0$$

Assim, a função de reação da empresa 1 é

$$y_1 = \frac{7200 - y_2}{4} \tag{1}$$

A função de reação da empresa 2 é encontrada de modo análogo:

$$y_2 = \frac{7200 - y_1}{4} \tag{2}$$

O equilíbrio de Cournot é obtido resolvendo-se o sistema de equações formado pelas duas funções de reação. Assim, resolvendo esse sistema para y_1 e y_2 e chamando de y_1^c e y_2^c as quantidades produzidas no equilíbrio de Cournot pelas empresas 1 e 2, respectivamente, encontramos

$$y_1^c = y_2^c = 1440$$

O lucro das duas empresas no equilíbrio de Cournot (π_1^c e π_2^c) é obtido substituindo-se y_1 e y_2 por 1440 na expressão para o lucro de cada empresa, obtendo-se

$$\pi_1^c = \pi_2^c = \left(3600 - \frac{1440 + 1440}{2}\right) 1440 - \frac{1440^2}{2} = 2.073.600$$

Cartel. Caso as duas empresas formem um cartel, elas deverão produzir de modo a tornar máximo seu lucro conjunto

$$\pi = \left(3600 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)(y_1 + y_2) - \frac{y_1^2 + y_2^2}{2}$$

Derivando essa expressão em relação a y_1 e y_2 e igualando essas derivadas a zero, obtemos um sistema de equações que descreve a condição de primeira ordem de lucro máximo:

$$\begin{cases} 3600 - 2y_1 - y_2 = 0 \\ 3600 - 2y_2 - y_1 = 0 \end{cases}$$

Chamando de y_1^m e y_2^m os valores obtidos para y_1 e y_2 quando esse sistema de equações é resolvido, temos

$$y_1^m = y_2^m = 1200$$

Os lucros π_1^m e π_2^m das duas empresas quando formam um cartel são dados por

$$\pi_1^m = \left(3600 - \frac{y_1^m + y_2^m}{2}\right) y_1^m - \frac{(y_1^m)^2}{2} = 2.160.000$$

Traição. Suponha que a empresa 2 produza a quantidade y_2^m de cartel e a empresa 1 decida descumprir o acordo de cartel produzindo a quantidade y_1^t que maximiza seu lucro. Essa será obtida substituindo-se y_2 por y_2^m na função de reação da empresa 1:

$$y_1^t = \frac{7200 - y_2^m}{4} = \frac{6000}{4} = 1500$$

Caso isso ocorra, o lucro da empresa 1 será

$$\pi_1^t = \left(3600 - \frac{y_1^t + y_2^m}{2}\right) y_1^t - \frac{\left(y_1^t\right)^2}{2} = 2.250.000$$

Condição para não traição. A empresa que trair, terá um ganho de lucro imediato de $\pi_1^t - \pi_1^m = 90.000$, mas perderá, em todos os anos subsequentes, $\pi_1^m - p_1^c = 86.400$.

O valor presente do ganho no primeiro ano é

$$\frac{90.000}{1+r}$$

no qual r é a taxa de desconto da empresa. O valor presente do lucro futuro sacrificado com a traição é

$$\frac{86.400}{r(1+r)}.$$

O menor valor de r para o qual a traição não seja melhor negócio do que a não traição é aquele que igual o valor presente do ganho decorrente da traição no lucro do primeiro ano ao valor presente das perdas também decorrentes da traição nos lucros dos anos que se seguem:

$$\frac{90.000}{1+r} = \frac{86.400}{r(1+r)} \Rightarrow r = \frac{86400}{90000} = 88\%$$

Essa é a taxa de desconto procurada.

8) Tudo se passa como se o governo de Nangila jogasse com cada embarcação um jogo cuja representação estratégica mostramos abaixo

		Enbarcação	
		paga taxa	não paga
Governo	fiscaliza	800 , −1000	4800 , −5000
	não fiscaliza	1000 , −1000	0 , 0

Caso o governo decida fiscalizar uma embarcação, ele terá de gastar ŋ200 quer essa embarcação tenha pago a taxa quer não. Se a embarcação já recolheu a taxa, o governo terá por ganho líquido a taxa recohlida de ŋ1000 menos o custo da fiscalização (ŋ200), o que resultará em um ganho líquido de ŋ800. Nesse caso, a embarcação arcará apenas com os ŋ1000 referentes à taxa paga. Caso o governo decida fiscalizar uma embarcação e esta não tiver recolhido a taxa, então, a embarcação terá que arcar com um prejuízo de ŋ5000 (taxa mais multa) e o governo terá uma receita líquida (do custo de fiscalização) de ŋ4800. Se o governo optar por não fiscalizar uma embarcação, então seu ganho, assim como a perda da embarcação, será de ŋ1000 caso a embarcação tenha recolhido a taxa e nulo caso contrário.

Sejam π_g a proporção das embarcações fiscalizadas pelo governo e π_b a proporção das embarcações que recolhem a taxa antes de se dirigir ao golfo. Do ponto de vista do dono de uma embarcação π_g é a probabilidade de que sua embarcação venha a ser fiscalizada. e, do ponto de vista do governo, π_b é a probabilidade de que uma embarcação qualquer tenha deixado de recolher a taxa. No equilíbrio de Nash com estratégias mistas, duas coisas devem ocorrer:

8.1 – π_g deve ser tal que deixe os donos das embarcações indiferentes entre recolher ou não previamente a taxa. O perda esperada de que recolhe previamente a taxa deve ser igual à perda esperada de quem não o faz, isto é

$$1000 = 5000\pi_g$$

8.2 – π_b deve ser tal que o governo fique indiferente entre fiscalizar ou não fiscalizar o barco, ou seja, as duas estratégias devem gerar o mesmo resultado esperado:

$$4800\pi_b + 800(1-\pi_b) = 1000(1-\pi_b)$$

Da condição 1, obtemos o valor de π_g no equilíbrio com estratégias mistas: $\pi_g = {}^1/_5 = 20\%$. Da condição 2, obtemos o valor de π_b nesse equilíbrio: $\pi_b = {}^1/_{25} = 4\%$. Desse modo concluímos que o governo deverá fiscalizar 20% das embarcações que pescam no golfo e que 4% dessas embarcações não recolheram previamente a taxa.

9) Lembrando que um gol é algo desejado pelo batedor e indesejado pelo goleiro, podemos dizer que, para o goleiro, defender um penalty equivale a fazer um gol, de tal forma que a forma estratégica do jogo, quanto jogado em estratégias puras, é representada abaixo:

		Goleiro	
		Esquerda	Direita
Batedor	Direita	1 , 0	0 , 1
	Esquerda	0 , 1	$^1/_2$, $^1/_2$

Sejam π_b e π_g, respectivamente, a probabilidade com que o batedor chuta no lado direito do gol e a probabilidade com que o goleiro pula para o lado direito do gol. No equilíbrio de Nash com estratégias mistas, π_b deve ser tal que o goleiro não tenha possibilidade de ganho esperado ao escolher entre pular à direita e pular à esquerda, isto é

$$1-\pi_b = \pi_b + \frac{1-\pi_b}{2} \Rightarrow \pi_b = \frac{1}{3}$$

Já π_g deve ser tal que o batedor não possa aumentar sua probabilidade de fazer gol escolhendo entre bater à direita ou à esquerda:

$$1-\pi_g = \frac{\pi_g}{2} \Rightarrow \pi_g = \frac{2}{3}$$

Assim, o equilíbrio de Nash com estratégias mistas é dado pela combinação de estratégias na qual o batedor chuta à direita com probabilidade de $^1/_3$ e o goleiro pula à direita com probabilidade de $^2/_3$.