Economia com um único agente

Roberto Guena de Oliveira

12 de maio de 2022

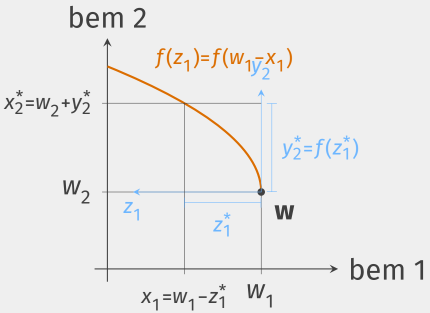
Apresentação

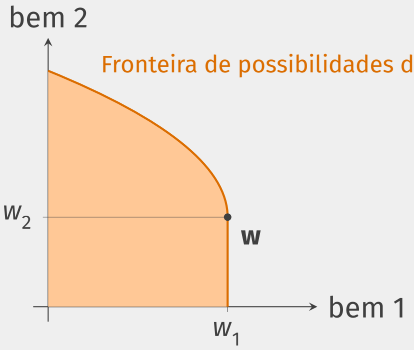
O que veremos?

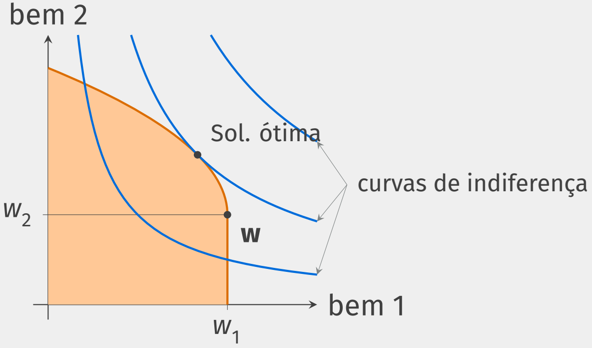
Modelos de uma economia com um único agente.
Os modelos serão usados para ilustrar a) o problema da alocação de recursos escassos com usos alternativos na produção, b) as condições gerais de alocação eficiente envolvendo consumo e produção; c) as condições de equilíbrio geral competitivo, relacionando as condições de oferta e de demanda e d) algumas propriedades do equilíbrio de mercado.

Primeiro modelo

- dois bens, existentes em quantidades iniciais w_1 e w_2;
- o bem 1 pode ser empregado para produzir mais do bem 2 de acordo com a função de produção $y_2 = f(z_1)$ na qual z_1 é a quantidade do bem 1 usada na produção do bem 2;
- as preferências do consumidor são representadas pela função de utilidade $U(x_1, x_2)$ na qual, x_1 e x_2 representam as quantidades consumidas dos bens 1 e 2, respectivamente;
- devem ser respeitadas as seguintes restrições: $x_1, x_2, z_1 \geq 0$, $x_1 \leq w_1 - z_1$, $y_2 \leq f(z_1)$ e $x_2 \leq w_2 + y_2$.


bem 2
$f(z_1)=f(w_1-x_1)$
y_2
$x_2^*=w_2+y_2^*$
$y_2^*=f(z_1^*)$
w_2
z_1
z_1^*
w
bem 1
$x_1=w_1-z_1^*$
w_1


bem 2
Fronteira de possibilidades de produção (FPP)
w_2
w
bem 1
w_1


bem 2
Sol. ótima
curvas de indiferença
w_2
w
bem 1
w_1

Dotações iniciais: $w_1 = 6$ e $w_2 = 3$;
Função de utilidade: $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$;
Função de produção: $y_2 = 2\sqrt{z_1}$.

Condições de 1ª ordem

$$y_2 = 2\sqrt{z_1}$$

$$PMg = TMS \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{z_1}} = |TMS(6 - z_1, 3 + y_2)| = \frac{3 + 2\sqrt{z_1}}{6 - z_1}$$

$$z_1 = 1; \; x_1 = 5; \; x_2 = 5$$

Segundo modelo

- dois bens, existentes em quantidades iniciais w_1 e w_2;
- os bens 1 e 2 podem ser empregados para produzir mais do bem 2 de acordo com a função de produção $q_2 = f(z_1, z_2)$ na qual z_1 é a quantidade do bem um usada na produção do bem 2;
- as preferências do consumidor são representadas pela função de utilidade $U(x_1, x_2)$ na qual, x_1 e x_2 representam as quantidades consumidas dos bens 1 e 2, respectivamente;
- devem ser respeitadas as seguintes restrições: $x_1, x_2, z_1 \geq 0$, $x_1 \leq w_1 - z_1$, $q_2 \leq f(z_1, z_2)$ e $x_2 \leq w_2 - z_2 + q_2$.

Chamamos de produção líquida de um bem a medida do impacto que a atividade produtiva tem sobre a disponibilidade de bens para o consumo. Na presente especificação, a produção líquida do bem 1 é $-z_1$ e a produção líquida do bem 2 é $y_2 = q_2 - z_2$. Dada $y_1 = -z_1$, a produção líquida do bem 2 não pode ser superior a $f(-y_1, z_2) - z_2$.

Conjunto de produção

O conjunto de produção, usualmente notado por $\mathbb{Y}$, é o conjunto de todos os vetores de produção líquida factíveis.

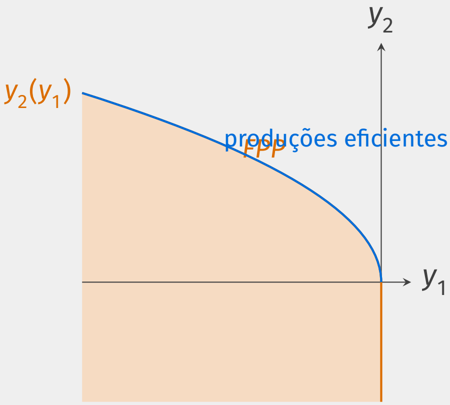
Eficiência técnica

Dizemos que um processo produtivo é tecnicamente eficiente quando a produção líquida de cada bem é a maior possível dadas as produções líquidas dos outros bens. Em termos mais formais, um plano de produção $\mathbf{y}^*$ é eficiente caso

$$\nexists \mathbf{y} \in \mathbb{Y} | \mathbf{y} \geq \mathbf{y}^* \text{ e } \mathbf{y} \neq \mathbf{y}^*.$$

Em nosso exemplo, a produção será tecnicamente eficiente caso,

$$y_2 = max_{z_2}[f(-y_1, z_2) - z_2] = y_2(y_1).$$


y_2
$y_2(y_1)$
produções eficientes
FPP
y_1

A escolha ótima é aquela que maximiza a utilidade do consumidor, $U(x_1, x_2)$ dadas as restrições:

$$0 \leq x_1 \leq w_1 + y_1, \tag{1}$$
$$0 \leq x_2 \leq w_2 + y_2, \tag{2}$$
$$y_2 \leq f(-y_1, z_2) - z_2, \tag{3}$$
$$0 \leq z_2 \leq w_2 \tag{4}$$

e

$$-w_1 \leq y_1 \leq 0. \tag{5}$$

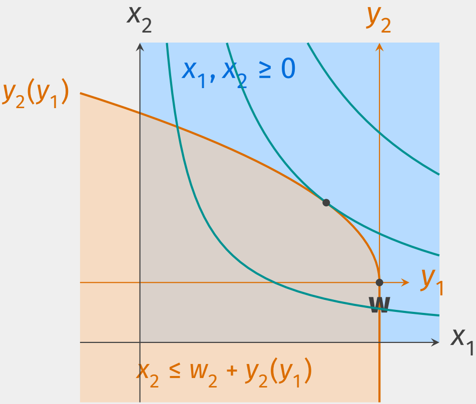
A escolha ótima é aquela que maximiza a função de utilidade do consumidor, $U(x_1, x_2)$, respeitando as condições

$$\begin{gathered} 0 \leq x_1 \leq w_1 + y_1, \\ 0 \leq x_2 \leq w_2 + y_2, \\ y_2 \leq y_2(y_1), \\ 0 \leq z_2 \leq w_2, \end{gathered}$$

e

$$-w_1 \leq y_1 \leq 0.$$

Em que $y_2(y_1)$ é o valor máximo de y_2 respeitando (3) e (4) (slide anterior).


x_2
y_2
$x_1, x_2 \geq 0$
$y_2(y_1)$
y_1
w
x_1
$x_2 \leq w_2 + y_2(y_1)$

$$U(x_1, x_2) = x_1 x_2$$
$$f(z_1, z_2) = 3\sqrt[3]{z_1 z_2}$$
$$w_1 = 8,\ w_2 = 2$$

Determinação de $y_2(y_1)$

$$y_2(y_1) = \max_{z_2}[3\sqrt[3]{-y_1\, z_2} - z_2]$$
$$\sqrt[3]{-y_1} = \sqrt[3]{z_2^2} \text{ (cond. 1ª ordem) } \Rightarrow z_2 = \sqrt{-y_1}$$
$$y_2(y_1) = 2\sqrt{-y_1}$$

Exemplo (escolha ótima)

$$-y_2'(-y_1) = |TMS|$$

$$\frac{1}{\sqrt{-y_1}} = \frac{w_2 + 2\sqrt{-y_1}}{w_1 + y_1}$$

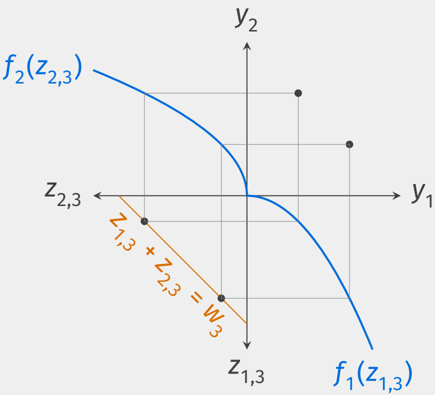
$$y_1 = -\frac{16}{9},\ y_2 = \frac{8}{3}$$

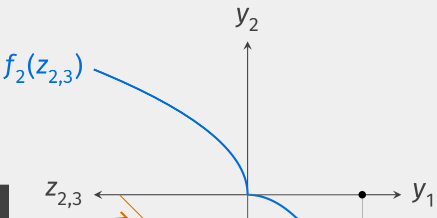
$$x_1 = \frac{56}{9},\ x_2 = \frac{14}{3}.$$

Terceiro modelo

- três bens com dotações iniciais w_1 e w_2 e w_3;
- função de utilidade $U(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2)$ (o bem 3 é um neutro);
- funções de produção: $y_1 = f_1(z_{1,3})$ e $y_2 = f_2(z_{2,3})$, nas quais $z_{1,3}$ e $z_{2,3}$ são, respectivamente, as quantidades do bem 3 empregadas na produção do bem 1 e do bem 2, respctivamente;
- devem ser respeitadas as restrições: $x_1, x_2, z_{1,3}, z_{2,3} \geq 0$, $x_1 \leq w_1 + f_1(z_{1,3})$, $x_2 \leq w_2 + f_2(z_{2,3})$ e $z_{1,3} + z_{2,3} \leq w_3$.

Representação das restrições





A fórmula da curva de nível da fronteira de possibilidades de produção assumindo $z_{1,3} + z_{2,3} = -y_3 = w_3$ é obtida a partir de

$$\begin{cases} y_1 = f_1(z_{1,3}) \\ y_2 = f_2(z_{2,3}) \\ z_{1,3} + z_{2,3} = w_3 \end{cases}$$

Inclinação da fronteira de possibilidades de produção

Usando o teorema da função implícita, obtemos

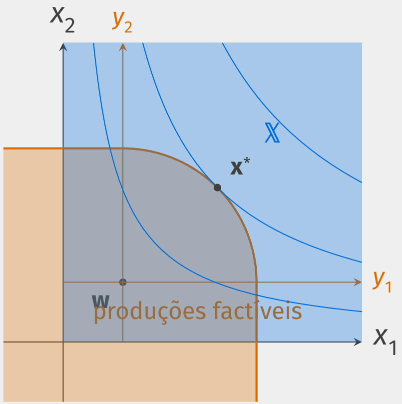
$$\begin{cases} 1 = \dfrac{df_1(z_{1,3})}{dz_{3_1}} \dfrac{dz_{1,3}}{dy_1} \\ \dfrac{dy_2}{dy_1} = \dfrac{df_2(z_{2,3})}{dz_{2,3}} \dfrac{dz_{2,3}}{dy_1} \\ \dfrac{dz_{1,3}}{dy_1} + \dfrac{dz_{2,3}}{dy_1} = 0 \end{cases}$$

Inclinação da fronteira de possibilidades de produção

Resolvendo para $\frac{dy_2}{dy_1}$, obtemos

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{\frac{df_1(z_{1,3})}{dz_{1,3}}}{\frac{df_1(z_{2,3})}{dz_{2,3}}}$$

Ou seja, a inclinação da fronteira de possibilidades de produção, quando y_3 é mantido constante é dada pela razão entre as produtividades marginais do bem 3 na produção dos bens 1 e 2, respectivamente.



x_2
y_2
$\mathbb{X}$
$\mathbf{x}^*$
y_1
$\mathbf{w}$
produções factíveis
x_1

Propriedade da escolha ótima

Assumindo que o consumidor tenha preferências localmente não saciáveis, então, a escolha ótima se dará sobre a fronteira de possibilidades de produção (desenhada com origem no ponto correspondente à dotação inicial) e, caso, essa escolha não seja uma solução de canto, se tanto a *TMS* quanto a *TMT* sejam definidas nessa escolha, teremos:

$$TMS = TMT.$$

Nessas condições, na escolha ótima a quantidade do bem 2 que o consumidor está disposto a deixar de consumir para consumir uma unidade a mais do bem 1 é (aproximadamente) igual à quantidade do bem 2 que ele precisa deixar de produzir para poder produzir uma unidade a mais do bem 1.

Exemplo

- $w_1 = w_2 = 2$ e $w_3 = 8$;
- $U(w_1, w_2, w_2) = w_1 w_2$;
- $f_1(z_{1,3}) = 2\sqrt{z_{1,3}}$ e $f_2(z_{2,3}) = 2\sqrt{z_{2,3}}$

$$y_1 \leq 2\sqrt{z_{1,3}} \tag{6}$$

$$y_2 \leq 2\sqrt{z_{2,3}} \tag{7}$$

$$z_{1,3} + z_{2,3} \leq w_3 \tag{8}$$

De (6) e (7), $z_{1,3} \geq \frac{y_1^2}{4}$ e $z_{1,3} \geq \frac{y_2^2}{4}$. Substituindo em (8),

$$\frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{4} \leq w_3 = 8.$$

$$\begin{cases} TMT = TMS \\ (y_1, y_2, -w_3) \in FPP \end{cases}$$

$$\frac{\frac{d}{dz_{1,3}} f_1(z_{1,3})}{\frac{d}{dz_{2,3}} f_2(z_{2,3})} = \frac{UMg_1}{UMg_2} \Rightarrow \frac{\sqrt{z_{2,3}}}{\sqrt{z_{1,3}}} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{2 + \sqrt{z_{2,3}}}{2 + \sqrt{z_{1,3}}}$$

$$2\sqrt{z_{1,3}} + \sqrt{z_{1,3} z_{2,3}} = 2\sqrt{z_{2,3}} + \sqrt{z_{1,3} z_{2,3}} \Rightarrow z_{1,3} = z_{2,3} \Rightarrow y_1 = y_2$$

$$\frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{4} = 8 \text{ (FPP)} \Rightarrow \frac{y_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{4} = 8 \text{ (pois } y_1 = y_2)$$

$$y_1 = y_2 = 4 \Rightarrow x_1 = x_2 = 6.$$

Quarto modelo

- 4 bens com dotações iniciais w_1, w_2, w_3 e w_4;
- função de utilidade $U(x_1, x_2, x_3, x_4) = u(x_1, x_2)$ (bens 3 e 4 são neutros);
- funções de produção: os bens 1 e 2 podem ser produzidos a partir dos bens 3 e 4 de acordo com as funções $f_1(z_{1,3}, z_{1,4})$ e $f_2(z_{2,3}, z_{2,4})$;
- restrições:

$$x_1 \leq w_1 + f_1(z_{1,3}, z_{1,4}),$$

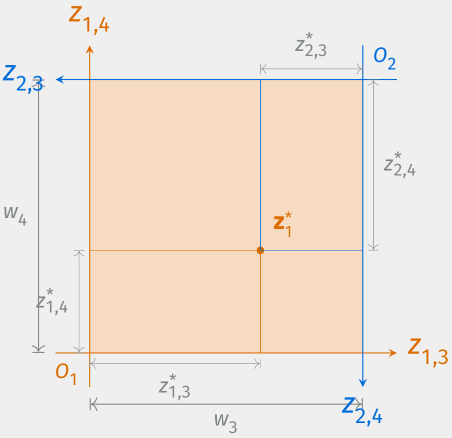
$$x_2 \leq f_2(z_{2,3}, z_{2,4}),$$

$$z_{1,3} + z_{2,3} \leq w_3$$

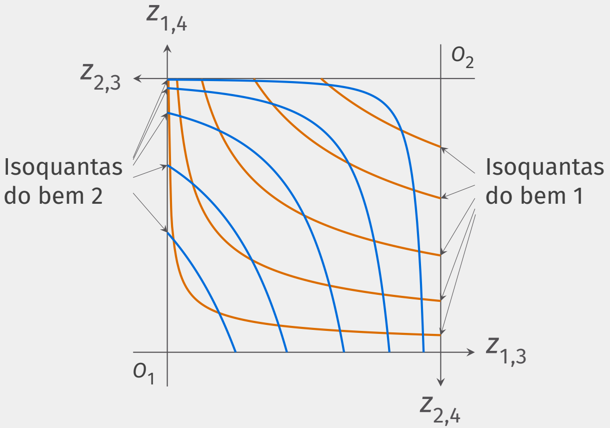
e

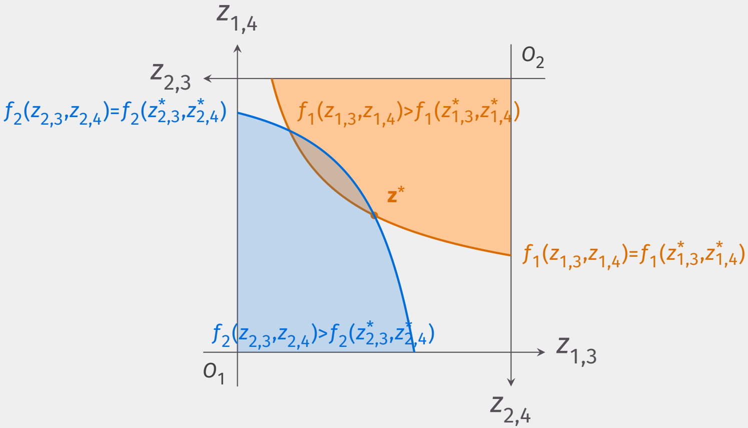
$$z_{1,4} + z_{2,4} \leq w_4.$$

Restrições na produção: caixa de Edgeworth na produção:

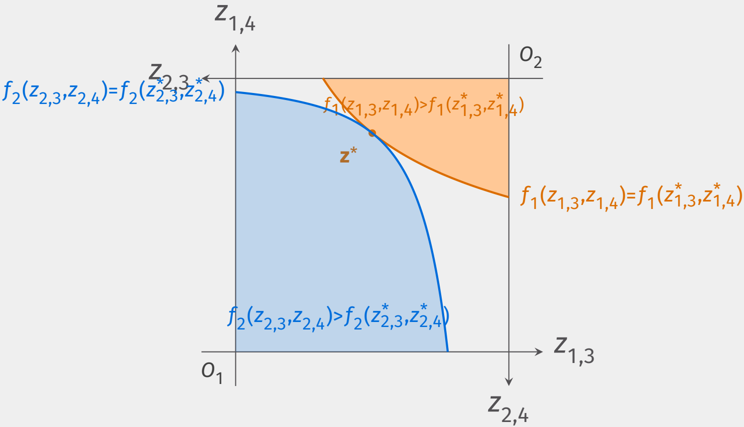


Representando as funções de produção

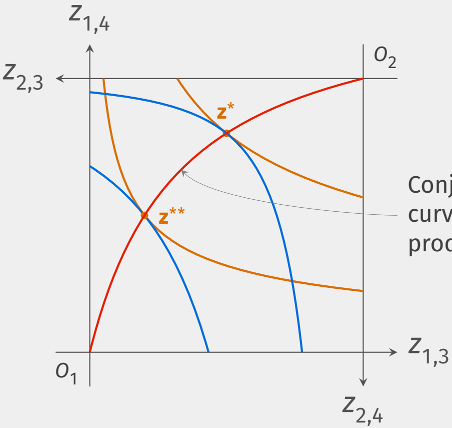



$z_{1,4}$
O_2
$z_{2,3}$
$f_2(z_{2,3},z_{2,4})=f_2(z^*_{2,3},z^*_{2,4})$
$f_1(z_{1,3},z_{1,4})>f_1(z^*_{1,3},z^*_{1,4})$
$\mathbf{z}^*$
$f_1(z_{1,3},z_{1,4})=f_1(z^*_{1,3},z^*_{1,4})$
$f_2(z_{2,3},z_{2,4})>f_2(z^*_{2,3},z^*_{2,4})$
$z_{1,3}$
O_1
$z_{2,4}$

Uma produção tecnicamente eficiente

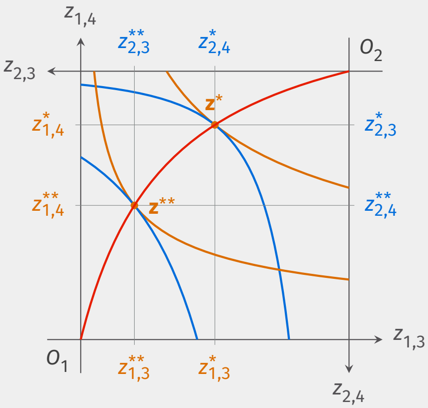


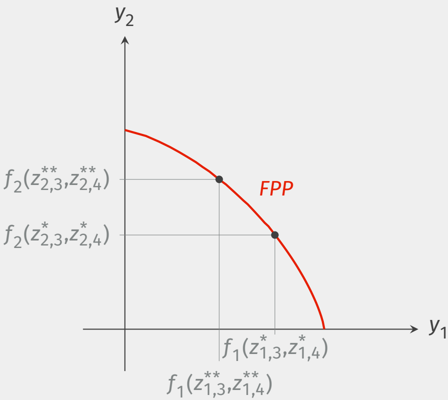
O conjunto de Pareto na produção



Conjunto de Pareto ou curva de contrato na produção

A *FPP* PARA OS BENS 1 E 2





Ao longo da curva de contrato na produção, assumindo solução interior, sempre vale

$$\begin{cases} y_1 = f(z_{1,3}, z_{1,4}) \\ y_2 = f(z_{2,3}, z_{2,4}) \\ z_{1,3} + z_{2,3} = w_3 \\ z_{1,4} + z_{2,4} = w_4 \\ \frac{\frac{\partial f_1}{\partial z_{1,3}}}{\frac{\partial f_1}{\partial z_{1,4}}} = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial z_{2,3}}}{\frac{\partial f_2}{\partial z_{2,4}}}; \ \left(\frac{PMg_{1,3}}{PMg_{1,4}} = \frac{PMg_{2,3}}{PMg_{2,4}} = TTS\right). \end{cases}$$

Podemos usar, então o teorema da função implícita e derivar as quatro primeiras equações em relação a y_1 para obter:

$$\begin{cases} 1 = PMg_{1,3}\dfrac{dz_{1,3}}{dy_1} + PMg_{1,4}\dfrac{dz_{1,4}}{dy_1} \\ \dfrac{dy_2}{dy_1} = PMg_{2,3}\dfrac{dz_{2,3}}{dy_1} + PMg_{2,4}\dfrac{dz_{2,4}}{dy_1} \\ \dfrac{dz_{1,3}}{dy_1} + \dfrac{dz_{2,3}}{dy_1} = 0 \\ \dfrac{dz_{1,4}}{dy_1} + \dfrac{dz_{2,4}}{dy_1} = 0 \end{cases}$$

Substituindo as duas últimas igualdades nas duas primeiras e usando a última igualdade do slide anterior chegamos a

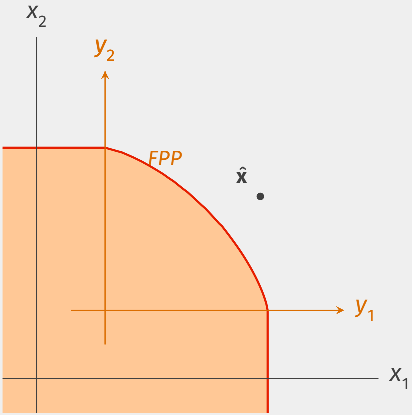
$$\begin{cases} 1 = PMg_{1,4}\left(TTS\dfrac{dz_{1,3}}{dy_1} + \dfrac{dz_{1,4}}{dy_1}\right) \\ \dfrac{dy_2}{dy_1} = -PMg_{2,4}\left(TTS\dfrac{dz_{1,3}}{dy_1} + \dfrac{dz_{1,4}}{dy_1}\right) \end{cases}$$

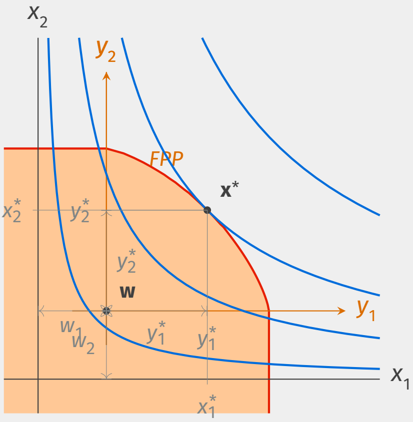
$$\begin{cases} 1 = PMg_{1,4}\left(TTS\frac{dz_{1,3}}{dy_1} + \frac{dz_{1,4}}{dy_1}\right) \\ \frac{dy_2}{dy_1} = -PMg_{2,4}\left(TTS\frac{dz_{1,3}}{dy_1} + \frac{dz_{1,4}}{dy_1}\right) \end{cases}$$

Dividindo a segunda equação pela primeira, obtemos, por fim,

$$TTS = \frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{PMg_{2,4}}{PMg_{1,4}} = -\frac{PMg_{2,3}}{PMg_{1,3}}$$

Possibilidades de consumo




x_2
y_2
FPP
$\mathbf{x}^*$
x_2^*
y_2^*
y_2^*
$\mathbf{w}$
y_1
w_1
w_2
y_1^*
y_1^*
x_1
x_1^*

Exemplo

- $w_1 = w_2 = 0$, $w_3 = w_4 = 8$;
- $U(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\, x_2$;
- $f_1(z_{1,3} z_{1,4}) = 4\sqrt[4]{z_{1,3} z_{1,4}^2}$ e $f_2(z_{2,3} z_{2,4}) = 4\sqrt[4]{z_{2,3}^2 z_{2,4}}$.

Eficiência técnica

$$TTS_1 = TTS_2 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{z_{1,4}}{z_{1,3}} = 2\frac{z_{2,4}}{z_{2,3}} \tag{9}$$

Restrição dos fatores de produção

$$z_{1,3} + z_{2,3} = w_3 = 8 \quad \text{e} \quad z_{1,4} + z_{2,4} = w_4 = 8 \tag{10}$$

Exemplo: condições de ótimo

Curva de contrato na produção

$$\frac{1}{2}\frac{z_{1,4}}{z_{1,3}} = 2\frac{8 - z_{1,4}}{8 - z_{1,3}} \quad \text{(combinação de (9) e (10))}$$

$$z_{1,4} = \frac{32z_{1,3}}{8 + 3z_{1,3}},\; z_{2,3} = 8 - z_{1,3},\; z_{2,4} = 8\frac{8 - z_{1,3}}{8 + 3z_{1,3}} \tag{11}$$

Produção em função de $z_{1,3}$ (abreviado para z)

$$y_1 = 4\sqrt[4]{\frac{1024z^3}{(8 + 3z)^2}} \quad \text{e} \quad y_2 = 4\sqrt[4]{8\frac{(8 - z)^3}{8 + 3z}}. \tag{12}$$

Produção eficiente

$$|TMT| = |TMS| \Rightarrow \underbrace{\frac{PMg_{2,3}}{PMg_{1,3}} = \frac{PMg_{2,4}}{PMg_{1,4}}}_{|TMT|} = \underbrace{\frac{UMg_1}{UMg_2}}_{|TMS|} \tag{13}$$

$$\frac{2\sqrt[4]{\frac{z_{2,4}}{z_{2,3}^2}}}{\sqrt[4]{\frac{z_{1,4}^2}{z_{1,3}^3}}} = \frac{y_2}{y_1} \xRightarrow[(11),\,(12)]{} 2\sqrt[4]{\frac{z(8+3z)}{128(8-z)}} = \sqrt[4]{\frac{(8-z)^3(8+3z)}{128z^3}} \Rightarrow z = \frac{8}{3}. \tag{14}$$

Exemplo: solução ótima

$$z_{1,3} = z = \frac{8}{3},\ z_{1,4} = \frac{16}{3},\ z_{2,3} = \frac{16}{3},\ z_{2,4} = \frac{8}{3}.$$

$$x_1 = y_1 = y_2 = x_2 = 16\sqrt[4]{\frac{8}{27}}.$$

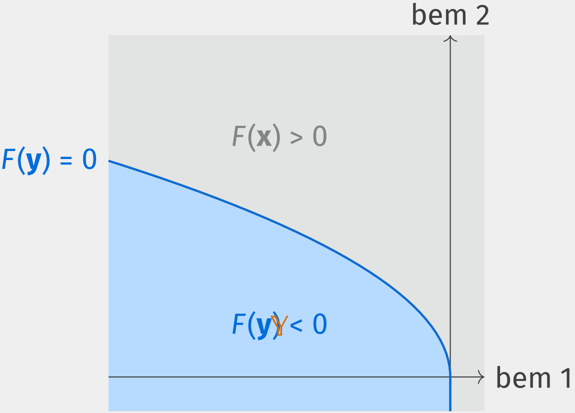
Quinto modelo

Quinto modelo:

- L bens denotados por $1, 2, \dots, \ell, \dots, L$.
- Assumiremos um conjunto de produção $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^L$ fechado (contém sua fronteira) e com limite superior ($\exists \mathbf{y}^+ \in \mathbb{R}^L | \mathbf{y} \in \mathbb{Y} \Rightarrow \mathbf{y} \ll \mathbf{y}^+$).
- Função de utilidade: $U(\mathbf{x})$
- Restrição: $\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq x + \mathbf{y}$ para algum $\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$.

Se o conjunto de produção é fechado, então existe ao menos uma função contínua $F : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ tal que $F(\mathbf{y}) = 0$ se, e somente se, $\mathbf{y}$ pertence à fronteira de $\mathbb{Y}$ e $F(\mathbf{y}) \leq 0$ se, e somente se, $\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$.

A função de transformação para $L = 2$



Exemplo 1

$$\mathbb{Y} = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | y_1 \leq 0 \text{ e } y_2 \leq 2\sqrt{-y_1}\right\}$$

$$F(y_1, y_2) = \max\left\{y_1, y_2 - 2\sqrt{-y_1}\right\}.$$

Exemplo 2

$$\mathbb{Y} = \left\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 | y_3 \leq 0 \text{ e } \exists z \in \mathbb{R} \text{ tal que } y_1 \leq 2\sqrt{z} \text{ e } y_2 \leq 2\sqrt{-y_3 - z}\right\}$$

$$F(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} \sqrt{y_1^2 + y_2^2} - 2\sqrt{-y_3} & \text{caso } y_1, y_2 \geq 0 \\ \max\{y_1, y_2\} - 2\sqrt{-y3} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_L^*) \in \mathbb{Y}$ com $F(\mathbf{y}^*) = 0$. Defina a seguinte relação implícita entre y_ℓ e y_k:

$$F(y_1^*, \ldots, y_{\ell-1}^*, y_\ell, y_{\ell+1}^*, \ldots, y_{k-1}^*, y_k, y_{k+1}^*, \ldots, y_L^*) = 0.$$

Definimos a taxa marginal de transformação entre os bens ℓ e k, $TMT_{\ell,k}$, como a derivada da produção líquida de k, $\frac{dy_k}{dy_\ell}$ em relação à produção líquida de ℓ de acordo com essa relação implícita. Aplicando o teorema da função implícita no ponto $\mathbf{y} = \mathbf{y}^*$,

$$\frac{\partial F(\mathbf{y}^*)}{\partial y_\ell} + \frac{\partial F(\mathbf{y}^*)}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dy_\ell} = 0 \Rightarrow \frac{dy_k}{dy\ell} = -\frac{\frac{\partial F(\mathbf{y}^*)}{\partial y_\ell}}{\frac{\partial F(\mathbf{y}^*)}{\partial y_k}}$$

Significado da *TMT*

- Se $y_\ell < 0$ e $y_k > 0$, o valor absoluto da $TMT_{\ell,k}$ é a produtividade margial do emprego do insumo ℓ na produção do bem k;
- Se $y_\ell < 0$ e $y_k < 0$ a $TMT_{\ell,k}$ é a taxa marginal de substituição técnica ente os insumos ℓ e k, medida em unidades do bem k por unidades do bem ℓ;
- Se $y_\ell > 0$ e $y_k > 0$, a $TMT - \ell, k$ é a taxa de transformação entre as produções dos bens ℓ e k medida em unidades de k por unidade de ℓ.

Exemplo 1

$$F(y_1, y_2) = \max\left\{y_1, y_2 - 2\sqrt{-y_1}\right\}.$$

$$F(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} \sqrt{y_1^2 + y_2^2} - 2\sqrt{-y_3} & \text{caso } y_1, y_2 \geq 0 \\ \max\{y_1, y_2\} - 2\sqrt{-y3} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$TMT_{1,2} = \begin{cases} -\frac{y_1}{y_2} & \text{caso } y_1, y_2 \geq 0 \\ 0 & \text{caso } y_1 < 0 \text{ e } y_2 = 2\sqrt{-y_3} \\ \text{indefinida} & \text{caso } y_2 < 0 \text{ e } y_1 = 2\sqrt{-y_3} \end{cases}$$

$$TMT_{3,1} = \begin{cases} -\frac{1}{2y_1} & \text{caso } y_1, -y_3 > 0 \\ \text{indefinida} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Alocação ótima na economia de um agente: o caso geral

Em uma economia com L bens, um único consumidor com função de utilidade $U(\mathbf{x}) = U(x_1, \dots, x_L)$, na qual o conjunto de produção é $\mathbb{Y} = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^L | F(\mathbf{y}) \leq 0\right\}$ e a dotação inicial é $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_L)$ é dada pela solução do problema de escolher $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de modo a maximizar $U(\mathbf{x})$, atendendo às restrições $F(\mathbf{y}) \leq 0$, $\mathbf{x} \geq 0$ e $\mathbf{x} \leq \mathbf{w} + \mathbf{y}$. O lagrangeano do problema é

$$\mathscr{L} = U(\mathbf{x}) - \lambda F(\mathbf{y}) - \sum_{\ell=1}^{L} \mu_\ell (x_\ell - w_\ell - y_\ell) + \sum_{\ell=1}^{L} \kappa_\ell x_\ell$$

Na solução ótima,
$\mathbf{y}^*, \mathbf{x}^*, \lambda^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\kappa}^*$,
$\forall\, \ell \in \{1, \dots, L\}$,

$$\frac{\partial U(\mathbf{x}^*)}{\partial x_\ell} - \mu_\ell^* + \kappa_\ell^* = 0,$$

$$\lambda \frac{F(\mathbf{y}^*)}{\partial y_\ell} - \mu_\ell^* = 0,$$

$$\mu_\ell^*, \kappa_\ell^* \geq 0,$$

$$\mu_\ell^*(x_\ell^* - w_\ell - y_\ell^*) = 0,$$

$$\kappa_\ell^* x_\ell^* = 0.$$

Se $0 < x_\ell^* < w_\ell + y_\ell^*$ e $x_j^* = w_j + y_j^*$,
então, $\kappa_\ell^* = \kappa_j^* = 0$ e

$$\underbrace{\frac{\frac{\partial U(\mathbf{x}^*)}{\partial x_\ell}}{\frac{\partial U(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j}}}_{|TMS|} = \frac{\mu_\ell^*}{\mu_j^*} = \underbrace{\frac{\frac{\partial F(\mathbf{y}^*)}{\partial y_\ell}}{\frac{\partial F(\mathbf{y}^*)}{\partial y_j}}}_{|TMT|}$$

Mercado

Suponha que a economia seja organizada em uma empresa e um consumidor, ambos se comportanto como tomadores de preço.

Empresa: Escolhe a produção líquida de modo a maximizar seu lucro dada a restrição de que sua escolha deve pertencer ao conjunto de produção. O lucro é distribuído ao único acionista da empresa que é o consumidor.

Consumidor: Determina o seu consumo de modo a maximizar sua utilidade, levando em consideração que sua restrição orçamentária impões que o valor da cesta consumida não pode ser superior ao valor de sua dotação inicial mais o lucro recebido da empresa.

Escolher $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_L)$ de modo a maximizar

$$\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell y_\ell = \mathbf{y} \cdot \mathbf{p}$$

dada a restrição

$$F(\mathbf{y}) \leq 0.$$

Lagrangeano

$$\mathscr{L} = \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell y_\ell - \lambda F(y_1, \dots, y_\ell)$$

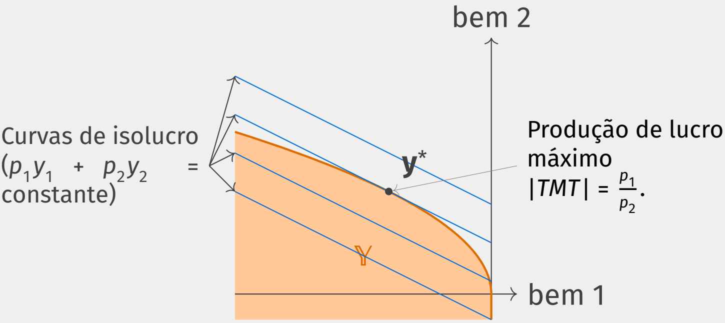
Condições de 1ª ordem

$$F(\mathbf{y}) = 0,$$

$$p_\ell = \lambda \frac{\partial F(\mathbf{y})}{\partial y_\ell}, \quad \ell = 1, \dots, L,$$

$$\frac{p_\ell}{p_k} = \frac{\frac{\partial F(\mathbf{y})}{\partial y_\ell}}{\frac{\partial F(\mathbf{y})}{\partial y_k}} = |TMT_{\ell,k}|.$$

Decisão da empresa (L = 2)



- $L = 2$
- $F(y_1, y_2) = \max\{y_1, y_2 - 2\sqrt{-y_1}\}$
- $F(y_1, y_2) = 0 \Rightarrow y_1 = 0$ ou $y_2 = 2\sqrt{-y_1}$
- $|TMT| = \frac{1}{\sqrt{-y_1}}$

Lucro máximo: exemplo 1

$$\begin{cases} y_2 = 2\sqrt{-y_1} \\ TMT = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-y_1}} = \frac{p_1}{p_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \\ y_2 = 2\frac{p_2}{p_1} \end{cases}$$

$L = 3$

$$F = \begin{cases} \sqrt{y_1^2 + y_2^2} - 2\sqrt{-y_3} & \text{se } y_1, y_2 \geq 0 \\ \max\{y_1, y_2\} - 2\sqrt{-y_3} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Condições de 1ª ordem ($p_1, p_2, p_3 > 0$)

$$\begin{cases} \frac{\frac{\partial F}{\partial y_1}}{\frac{\partial F}{\partial y_2}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{p_1}{p_2} \\ \frac{\frac{\partial F}{\partial y_1}}{\frac{\partial F}{\partial y_3}} = \frac{p_1}{p3} \Rightarrow \frac{y_1\sqrt{-y_3}}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} = \frac{p_1}{p_3} \\ F(y_1, y_2, y_3) = 0 \Rightarrow \sqrt{y_1^2 + y_2^2} - 2\sqrt{-y_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(\mathbf{p}) = 2\frac{p_1}{p_3} \\ y_2(\mathbf{p}) = 2\frac{p_2}{p_3} \\ y_3(\mathbf{p}) = -\frac{p_1^2+p_2^2}{p_3^2} \end{cases}$$

Chamaremos a função que relaciona a cada vetor de preços $\mathbf{p}$ o vetor de oferta líquida que maximiza o lucro da empresa, notada por $\mathbf{y}(\mathbf{p})$, de função de oferta da empresa.
No nosso último exemplo,

$$\mathbf{y}(p_1, p_2, p_3) = \left(2\frac{p_1}{p_3}, 2\frac{p_2}{p_3}, -\frac{p_1^2 + p_2^2}{p_3^2}\right)$$

A função que relaciona a cada vetor de preços o lucro máximo que a empresa pode obter é chamada função de lucro e será notada por $\pi(\mathbf{p})$. Note que

$$\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}(\mathbf{p}) = \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell y_\ell(\mathbf{p})$$

No último exemplo,

$$\pi(p_1, p_2, p_3) = 2\frac{p_1}{p_3} \times p_1 + 2\frac{p_2}{p_3} \times p_2 - \frac{p_1^2 + p_2^2}{p_3^2} \times p_3 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{p_3}$$

O consumidor deve escolher a cesta de consumo $\mathbf{x}$ que maximize sua utilidade, $U(\mathbf{x})$ dada a restrição orçamentária:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} + \pi.$$

Notaremos por $\mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{w}, \pi)$ a função que retorna a cesta que resolve esse problema e chamaremos essa função de função de demanda bruta.

Exemplo

Assuma que $L = 3$ e que $U(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$. Nesse caso a função de demanda será

$$\mathbf{x}(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{p_1 w_1 + p_2 w_2 + p_3 w_3 + \pi}{3p_1}, \frac{p_1 w_1 + p_2 w_2 + p_3 w_3 + \pi}{3p_2}, \frac{p_1 w_1 + p_2 w_2 + p_3 w_3 + \pi}{3p_3}\right).$$

Dizemos que o vetor de preços $\mathbf{p}^*$ é um vetor de preços de equilíbrio caso ele faça que

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{w} + \mathbf{y}(\mathbf{p}^*).$$

Ou seja, para cada $\ell \in \{1, \dots, L\}$,

$$x_\ell(\mathbf{p}^*) = w_\ell + y_\ell(\mathbf{p}^*).$$

Exemplo

- $L = 3$;
- $F(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} \sqrt{y_1^2 + y_2^2} - 2\sqrt{-y_3} & \text{caso } y_1, y_2 \geq 0 \\ \max\{y_1, y_2\} - 2\sqrt{-y3} & \text{caso contrário} \end{cases}$
- $U(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$.
- $w_1 = w_2 = 0$ e $w_3 = 4$

Condições de equilíbrio:

$$\begin{cases} x_1(\mathbf{p}) = w_1 + y_1(\mathbf{p}) \Rightarrow \dfrac{4p_3 + \frac{p_1^2+p_2^2}{p_3}}{3p_1} = 2\dfrac{p_1}{p_3} \\ x_2(\mathbf{p}) = w_2 + y_2(\mathbf{p}) \Rightarrow \dfrac{4p_3 + \frac{p_1^2+p_2^2}{p_3}}{3p_2} = 2\dfrac{p_2}{p_3} \\ x_3(\mathbf{p}) = w_3 + y_3(\mathbf{p}) \Rightarrow \dfrac{4p_3 + \frac{p_1^2+p_2^2}{p_3}}{3p_3} = 4 - \dfrac{p_1^2+p_2^2}{p_3^2} \end{cases}$$

Solução

$$\frac{p_2}{p_1} = 1,\ \frac{p_3}{p_1} = 1,\ y_1 = y_2 = 2,\ y_3 = -2,\ x_1 = x_2 = x_3 = 2$$

Chamamos a diferença entre a quantidade demandada de um bem menos sua dotação inicial menos sua oferta líquida de excesso de demanda pelo bem. Se o consumidor demandar uma cesta de bens sobre sua linha de restrição orçamentária, ou seja, caso $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot [\mathbf{w} + \mathbf{y}(\mathbf{p})]$, então a soma dos valores dos excessos de demanda em cada mercado é identicamente igual a zero:

$$\mathbf{p}[\mathbf{x}(\mathbf{p}) - \mathbf{w} - \mathbf{y}(\mathbf{p})] = \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell [x_\ell(\mathbf{p}) - w_\ell - y_\ell(\mathbf{p})] = 0$$

Consequência: se $L - 1$ mercados estão em equilíbrio, o L-ésimo mercado também está em equilíbrio. Como consequência, há um grau de liberdade na determinação dos preços de equilíbrio. Apenas os preços relativos de equilíbrio podem ser determinados.