

Teoria do Consumidor: Preferências e Utilidade

Roberto Guena de Oliveira

13 de março de 2011

Sumário

- 1 Função de utilidade
- 2 Hipóteses sobre preferências e função de utilidade
- 3 Funções de utilidade típicas

Função de Utilidade

Definição:

Uma função $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de **função de utilidade** caso, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$,

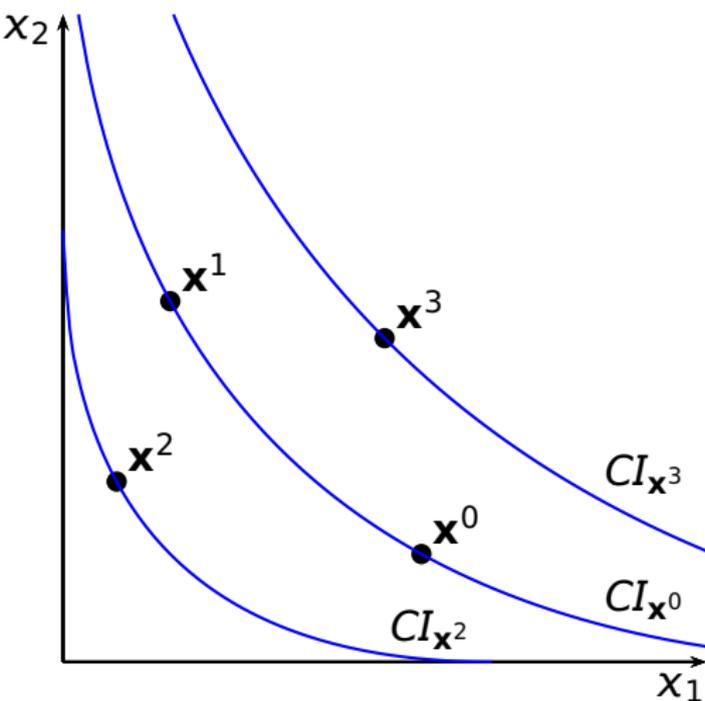
$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \Leftrightarrow U(\mathbf{x}) \geq U(\mathbf{y}).$$

Uma função de utilidade simplesmente atribui números reais a todas as cestas de bens do conjunto de consumo de tal sorte que cestas de bens mais preferidas recebam números mais elevados.

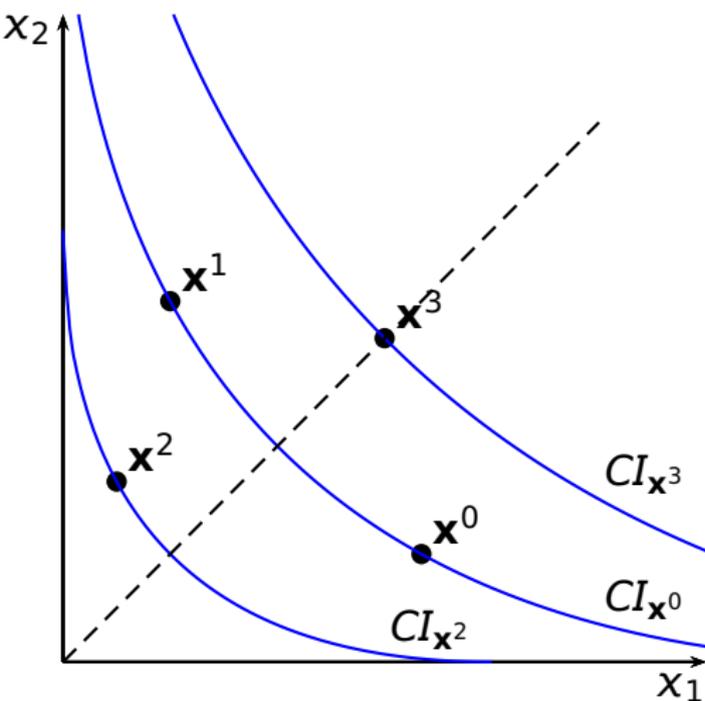
Condição suficiente para a existência de uma função de utilidade

Caso as preferências de um consumidor sejam completas, transitivas e contínuas, então, elas podem ser representadas por uma função de utilidade contínua.

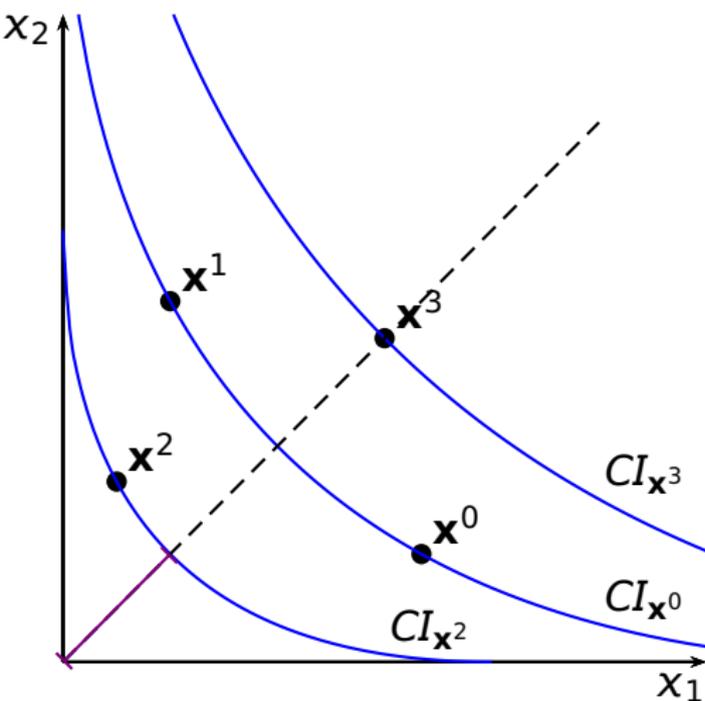
Exemplo: construindo uma função de utilidade



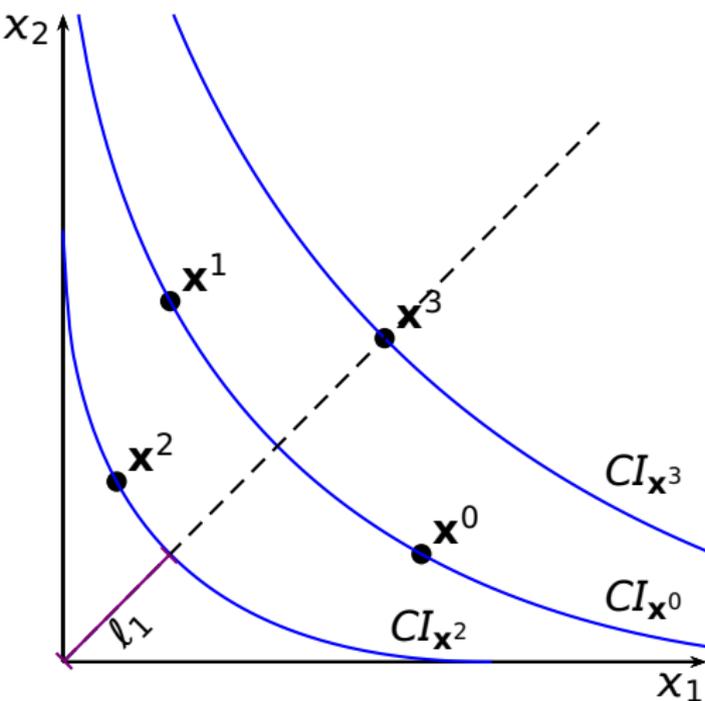
Exemplo: construindo uma função de utilidade



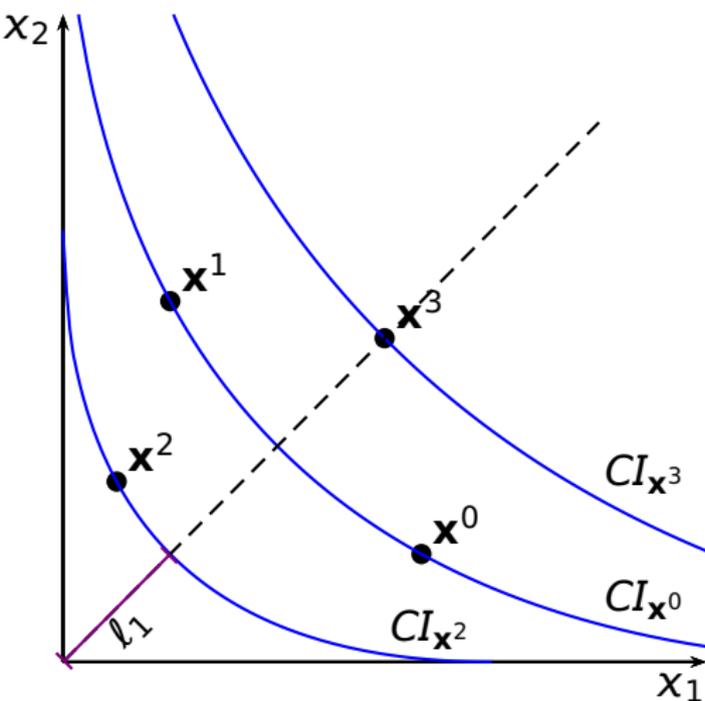
Exemplo: construindo uma função de utilidade



Exemplo: construindo uma função de utilidade

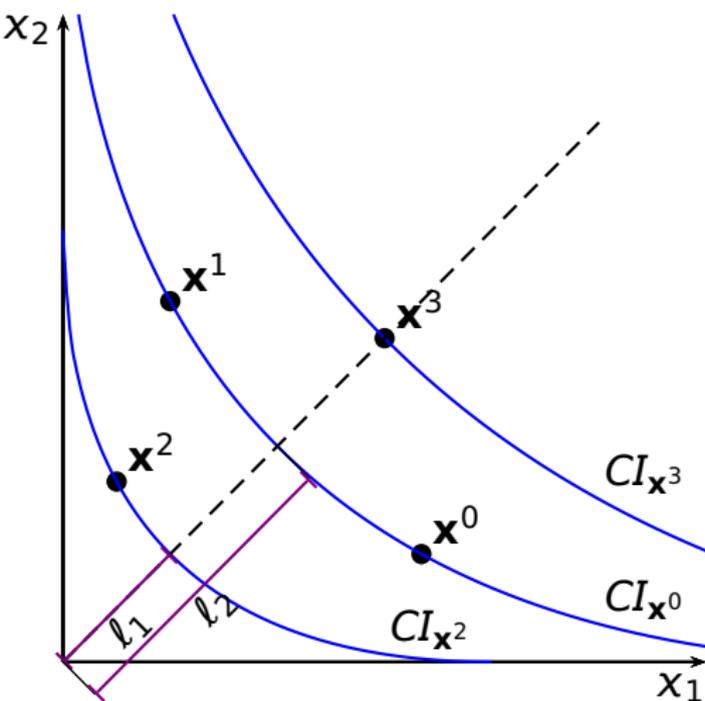


Exemplo: construindo uma função de utilidade



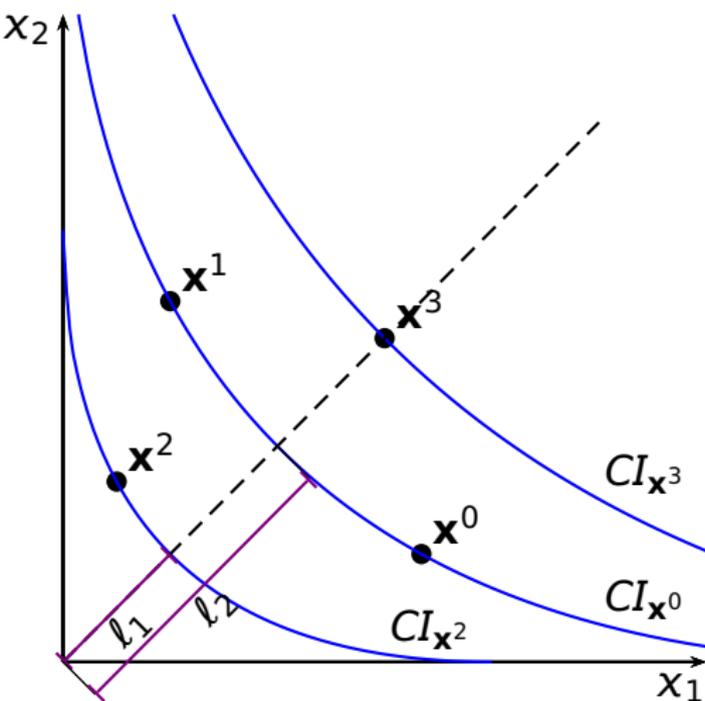
$$U(\mathbf{x}^2) = l_1$$

Exemplo: construindo uma função de utilidade



$$U(\mathbf{x}^2) = l_1$$

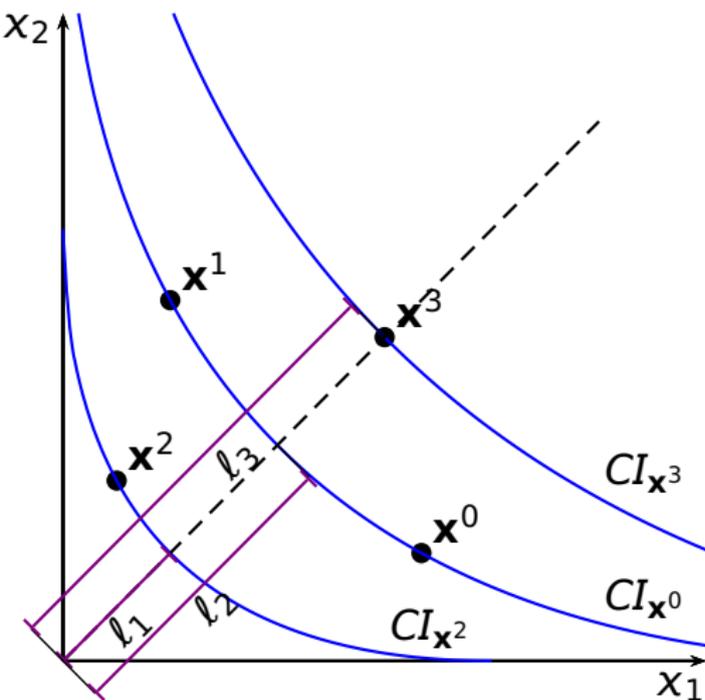
Exemplo: construindo uma função de utilidade



$$U(\mathbf{x}^2) = l_1$$

$$U(\mathbf{x}^0) = U(\mathbf{x}^1) = l_2$$

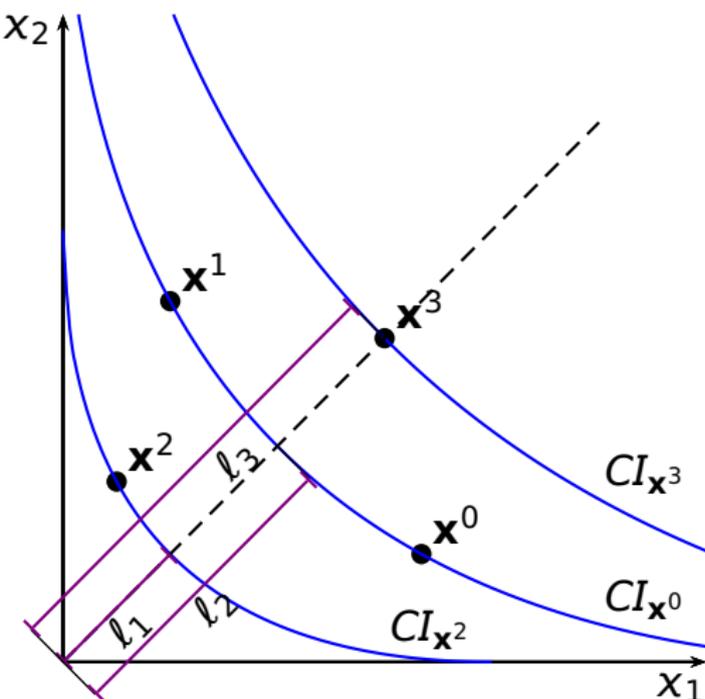
Exemplo: construindo uma função de utilidade



$$U(x^2) = l_1$$

$$U(x^0) = U(x^1) = l_2$$

Exemplo: construindo uma função de utilidade



$$U(\mathbf{x}^2) = l_1$$

$$U(\mathbf{x}^0) = U(\mathbf{x}^1) = l_2$$

$$U(\mathbf{x}^3) = l_3$$

Utilidade Ordinal

- Do modo como definimos a função de utilidade, esta tem por função **ordenar** as cestas de bens, atribuindo números maiores para as cestas mais desejadas, não importando o valor absoluto desses números.

Utilidade Ordinal

- Do modo como definimos a função de utilidade, esta tem por função **ordenar** as cestas de bens, atribuindo números maiores para as cestas mais desejadas, não importando o valor absoluto desses números.
- Por exemplo, no slide anterior a função de utilidade poderia ser a raiz quadrada da distância entre a origem e a curva de indiferença, pois a ordenação das cestas seria mantida.

Utilidade Ordinal

- Do modo como definimos a função de utilidade, esta tem por função **ordenar** as cestas de bens, atribuindo números maiores para as cestas mais desejadas, não importando o valor absoluto desses números.
- Por exemplo, no slide anterior a função de utilidade poderia ser a raiz quadrada da distância entre a origem e a curva de indiferença, pois a ordenação das cestas seria mantida.
- Também poderia ser considerada como função de utilidade o quadrado dessa distância.

Utilidade Ordinal

- Do modo como definimos a função de utilidade, esta tem por função **ordenar** as cestas de bens, atribuindo números maiores para as cestas mais desejadas, não importando o valor absoluto desses números.
- Por exemplo, no slide anterior a função de utilidade poderia ser a raiz quadrada da distância entre a origem e a curva de indiferença, pois a ordenação das cestas seria mantida.
- Também poderia ser considerada como função de utilidade o quadrado dessa distância.

Transformações Monotônicas

- Sejam $U(\mathbf{x})$ uma função de utilidade que represente adequadamente as preferências de um consumidor e f , uma função estritamente crescente definida na imagem de $U(\mathbf{x})$, então a função $V(\mathbf{x})$ definida para todo $\mathbf{x} \in X$ como

$$V(\mathbf{x}) = f(U(\mathbf{x}))$$

também é uma boa representação das características ordinais das preferências do mesmo consumidor.

Transformações Monotônicas

- Sejam $U(\mathbf{x})$ uma função de utilidade que represente adequadamente as preferências de um consumidor e f , uma função estritamente crescente definida na imagem de $U(\mathbf{x})$, então a função $V(\mathbf{x})$ definida para todo $\mathbf{x} \in X$ como

$$V(\mathbf{x}) = f(U(\mathbf{x}))$$

também é uma boa representação das características ordinais das preferências do mesmo consumidor.

- A função $V(\mathbf{x})$ definida acima é chamada de **transformação monotônica** da função $U(\mathbf{x})$.

Transformações Monotônicas

- Sejam $U(\mathbf{x})$ uma função de utilidade que represente adequadamente as preferências de um consumidor e f , uma função estritamente crescente definida na imagem de $U(\mathbf{x})$, então a função $V(\mathbf{x})$ definida para todo $\mathbf{x} \in X$ como

$$V(\mathbf{x}) = f(U(\mathbf{x}))$$

também é uma boa representação das características ordinais das preferências do mesmo consumidor.

- A função $V(\mathbf{x})$ definida acima é chamada de **transformação monotônica** da função $U(\mathbf{x})$.
- Duas funções de utilidade quaisquer representam as características ordinais das mesmas preferências se, e somente se, uma é uma transformação monotônica da outra.

Utilidade Cardinal

- Caso, ao contrário do que dissemos até aqui, seja dado um significado ao valor que a função de utilidade associa a cada cesta de bens, dizemos que a função de utilidade é **cardinal**, ou que os aspectos cardinais da função de utilidade são relevantes.

Utilidade Cardinal

- Caso, ao contrário do que dissemos até aqui, seja dado um significado ao valor que a função de utilidade associa a cada cesta de bens, dizemos que a função de utilidade é **cardinal**, ou que os aspectos cardinais da função de utilidade são relevantes.
- Os primeiros economistas *neoclássicos* trabalhavam com a hipótese de utilidade cardinal. Porém, hoje se sabe que toda a teoria microeconômica positiva e grande parte da microeconomia normativa dependem apenas dos aspectos **ordinais** da função de utilidade.

Utilidade Marginal

Definição

A utilidade marginal do bem i , UMg_i , é definida por

$$UMg_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

Taxa Marginal de Substituição: definição equivalente

Considere a função $x_j(x_i, \mathbf{x}^*)$
 ($\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*)$) definida por

$$U(x_1^*, \dots, x_i, \dots, x_j(x_i, \mathbf{x}^*), \dots, x_n^*) = U(\mathbf{x}^*)$$

A taxa marginal de substituição no ponto \mathbf{x}^* , em unidades do bem j por unidade do bem i , é definida por

$$TMS_{ij}(\mathbf{x}^*) = \frac{\partial x_j(x_i^*, \mathbf{x}^*)}{\partial x_i}$$

Diferenciando em relação a x_i a definição de $x_j(x_i, \mathbf{x}^*)$ e calculando igualdade em \mathbf{x}^* vem

$$\frac{\partial U(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + \frac{\partial x_j(x_i, \mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \frac{\partial U(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} = 0 \rightarrow TMS = -\frac{UMg_i(\mathbf{x}^*)}{UMg_j(\mathbf{x}^*)}$$

Exercício

Encontre a expressão da taxa marginal de substituição para as seguintes funções de utilidade:

- 1 $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$
- 2 $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$
- 3 $U(x_1, x_2) = \ln x_1 + \sqrt{x_2}$.

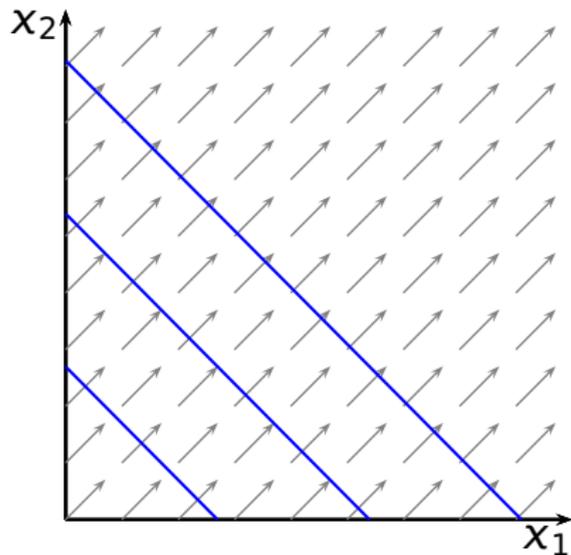
Monotonicidade e função de utilidade

- 1 **Monotonicidade Fraca:** Se comparada a \mathbf{y} , \mathbf{x} contém quantidades maiores de todos os bens, então $U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{y})$.
- 2 **Monotonicidade Forte:** Se, quando comparada a \mathbf{y} , \mathbf{x} possui pelo menos as mesmas quantidades de todos os bens e uma quantidade maior de, pelo menos, um bem, então $U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{y})$.

Exercício

Expresse as hipóteses de não saciedade local, de convexidade e de convexidade estrita em termos da função de utilidade, supondo que esta exista.

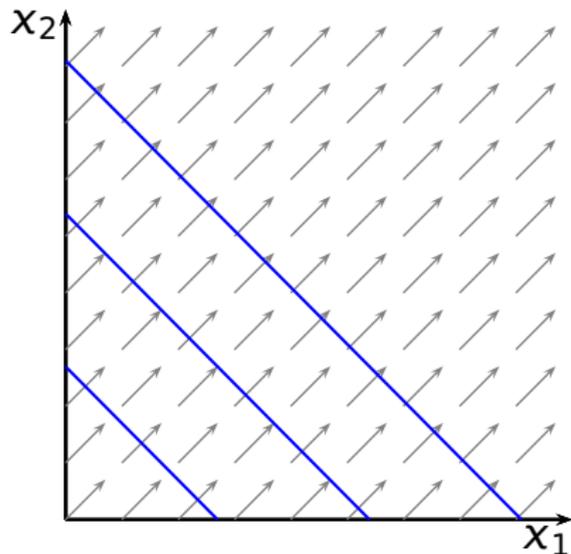
Substitutos Perfeitos



Características:

- *TMS* constante.

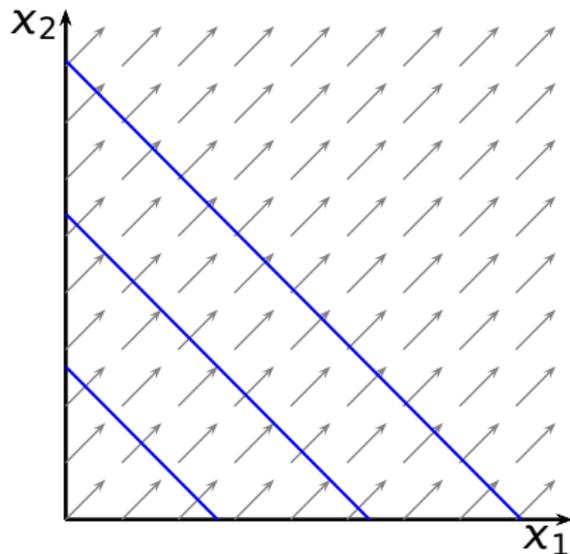
Substitutos Perfeitos



Características:

- TMS constante.
- Com escolha certa de unidades de medida, $TMS = -1$.

Substitutos Perfeitos



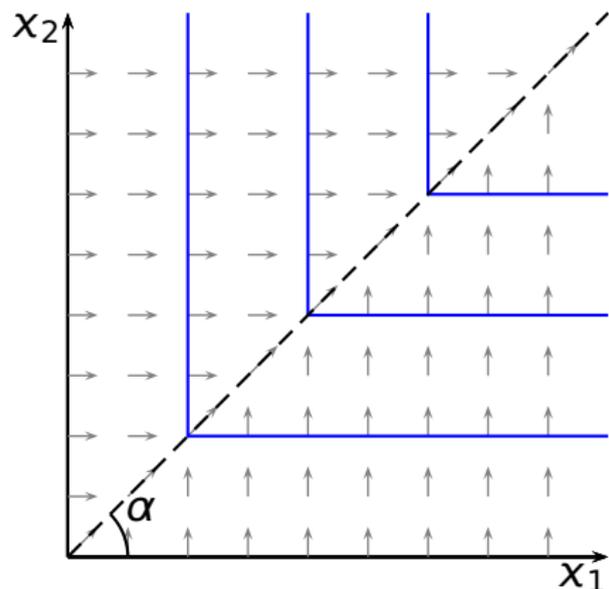
Características:

- TMS constante.
- Com escolha certa de unidades de medida, $TMS = -1$.
- Função de utilidade

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + x_2$$

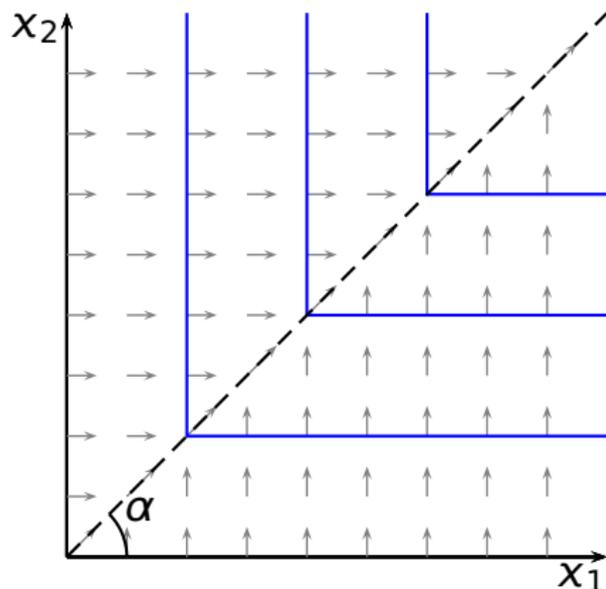
$$TMS = -1$$

Complementos Perfeitos



Características:

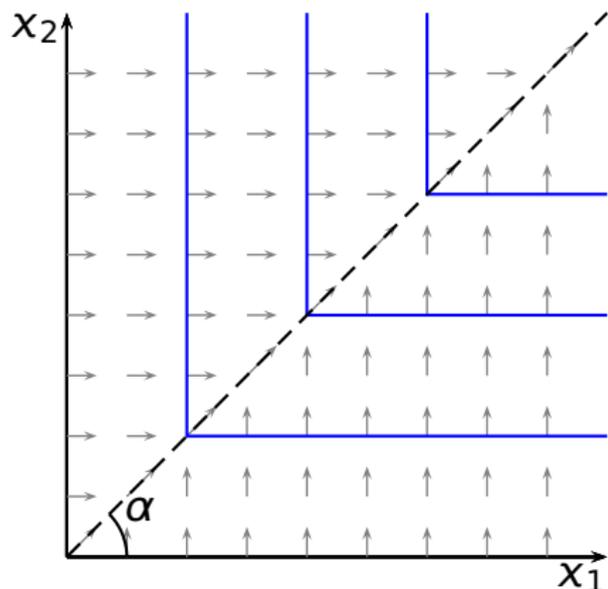
Complementos Perfeitos



Características:

- Uma unidade adicional de x_1 só tem utilidade quando combinada com α unidades de x_2 .

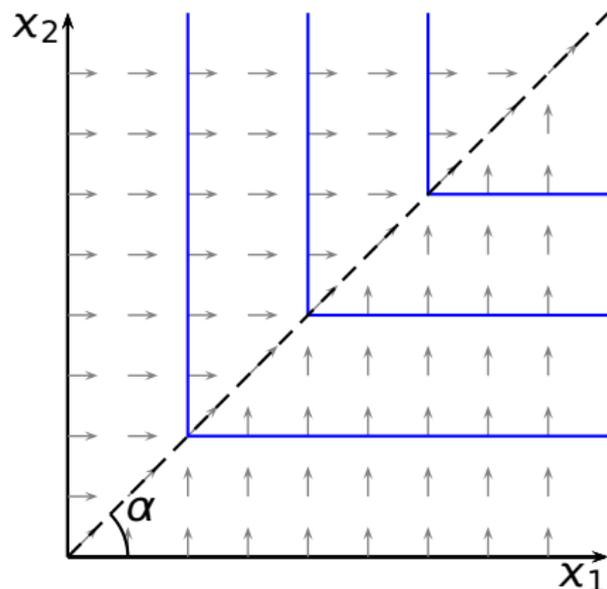
Complementos Perfeitos



Características:

- Uma unidade adicional de x_2 só tem utilidade quando combinada com $\frac{1}{\alpha}$ unidades de x_1 .

Complementos Perfeitos

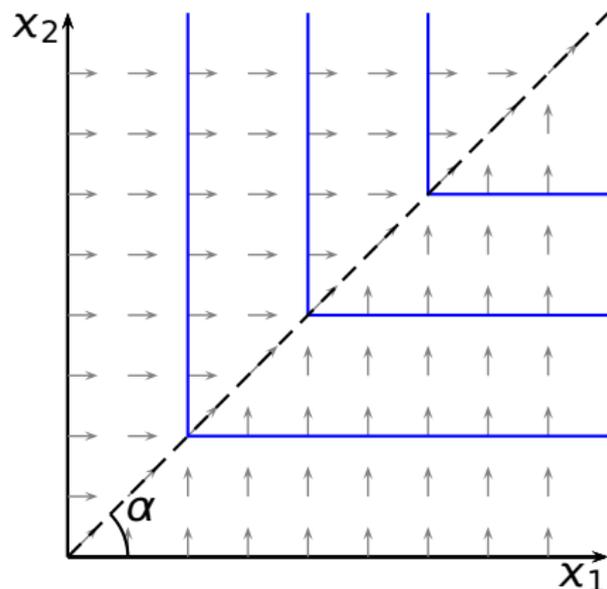


Características:

- Uma unidade adicional de x_2 só tem utilidade quando combinada com $\frac{1}{\alpha}$ unidades de x_1 .
- Com escolha certa de unidades de medida, $\alpha = 1$.
- Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, x_2\}$$

Complementos Perfeitos

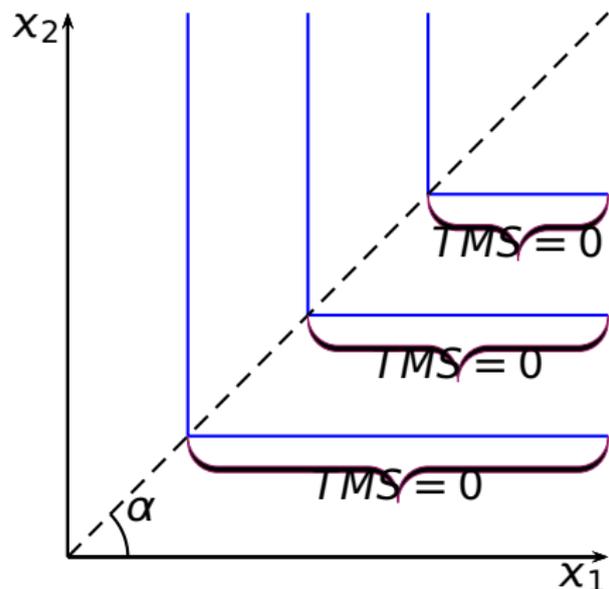


Características:

- Uma unidade adicional de x_2 só tem utilidade quando combinada com $\frac{1}{\alpha}$ unidades de x_1 .
- Com escolha certa de unidades de medida, $\alpha = 1$.
- Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, x_2\}$$

Complementos Perfeitos

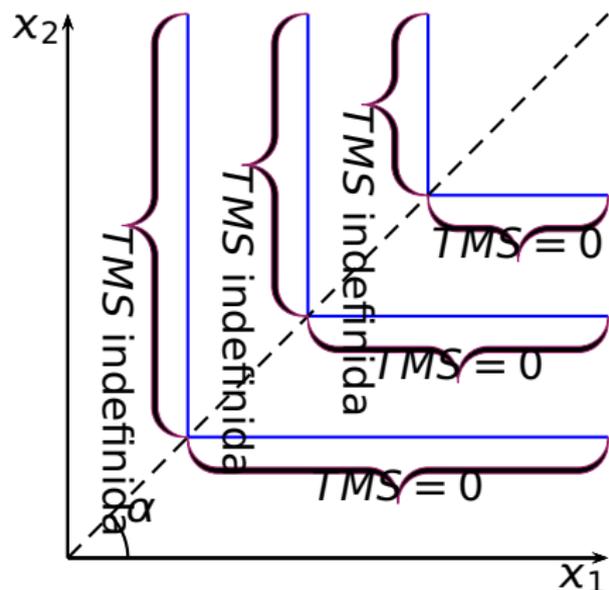


Características:

- Uma unidade adicional de x_2 só tem utilidade quando combinada com $\frac{1}{\alpha}$ unidades de x_1 .
- Com escolha certa de unidades de medida, $\alpha = 1$.
- Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, x_2\}$$

Complementos Perfeitos

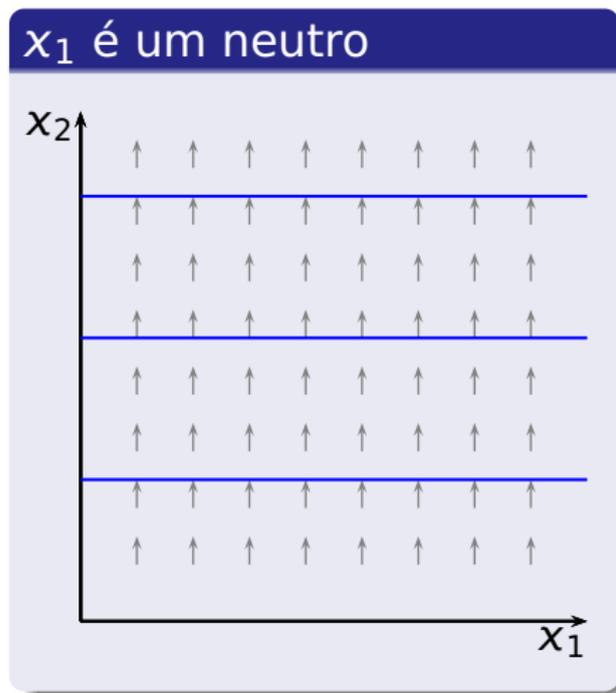


Características:

- Uma unidade adicional de x_2 só tem utilidade quando combinada com $\frac{1}{\alpha}$ unidades de x_1 .
- Com escolha certa de unidades de medida, $\alpha = 1$.
- Função de utilidade:

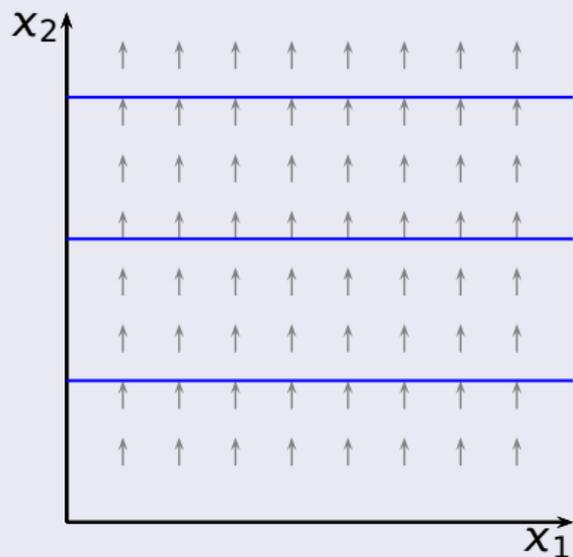
$$U(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, x_2\}$$

Neutros



Neutros

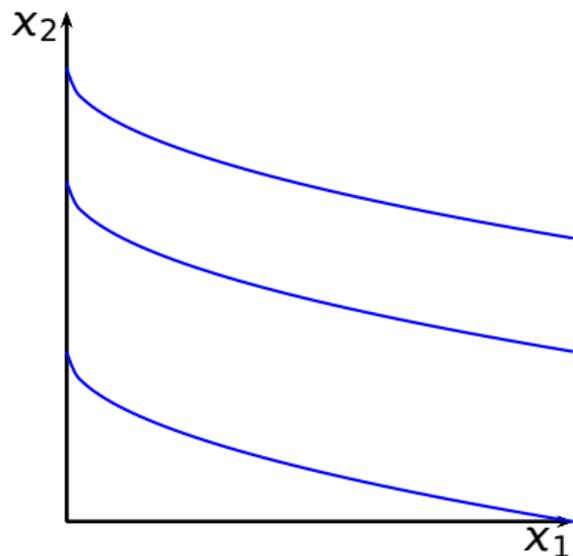
x_1 é um neutro



Função de utilidade

$$U(x_1, x_2) = x_2$$

Preferências quase lineares



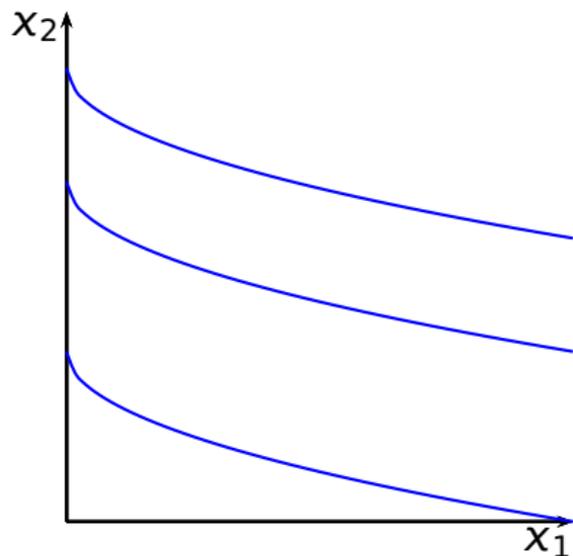
Características

- TMS depende exclusivamente de x_1 .
- Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$$

$$TMS = v'(x_1)$$

Preferências quase lineares



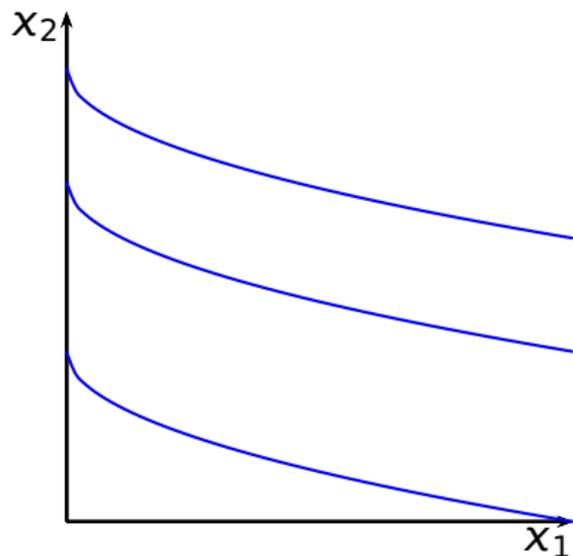
Características

- TMS depende exclusivamente de x_1 .
- Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$$

$$TMS = v'(x_1)$$

Preferências quase lineares



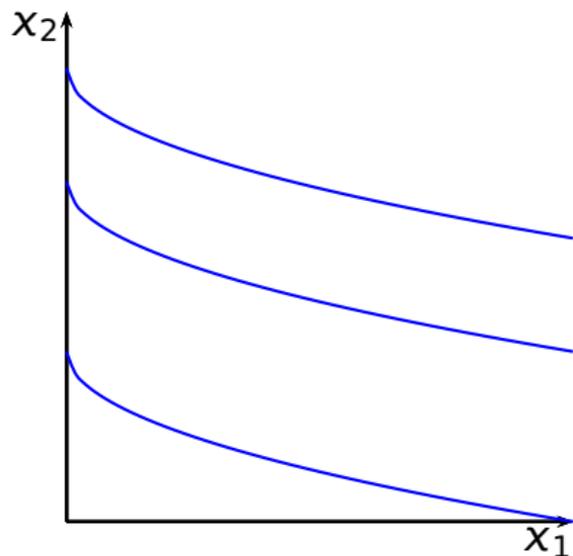
Características

- TMS depende exclusivamente de x_1 .
- Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$$

$$TMS = v'(x_1)$$

Preferências quase lineares



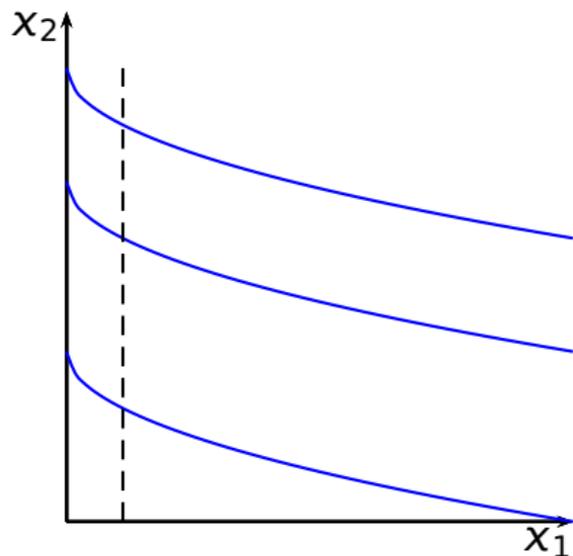
Características

- TMS depende exclusivamente de x_1 .
- Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$$

$$TMS = v'(x_1)$$

Preferências quase lineares



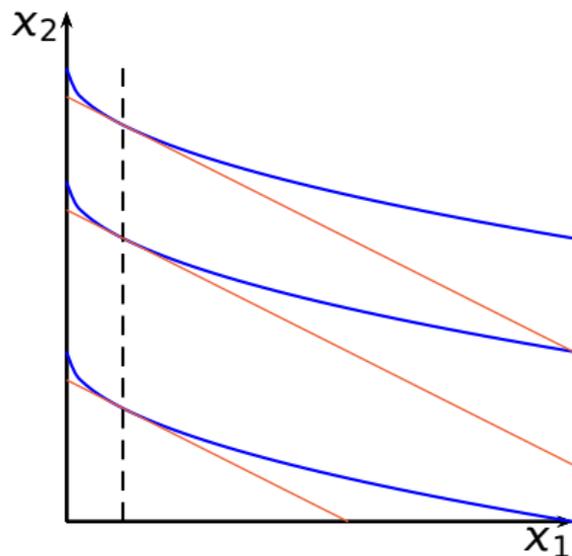
Características

- TMS depende exclusivamente de x_1 .
- Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$$

$$TMS = v'(x_1)$$

Preferências quase lineares



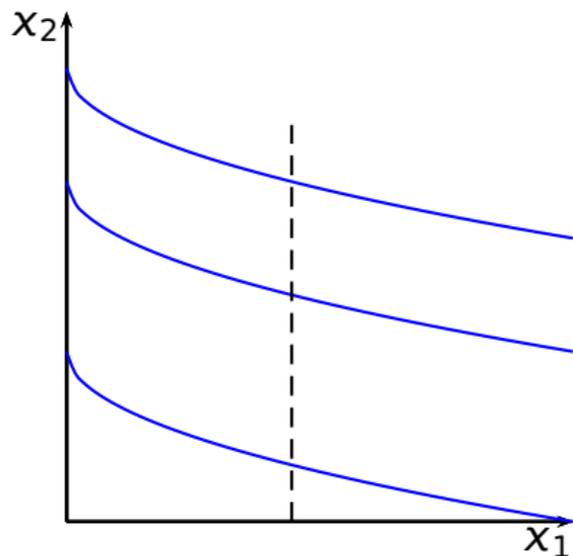
Características

- *TMS* depende exclusivamente de x_1 .
- Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$$

$$TMS = v'(x_1)$$

Preferências quase lineares



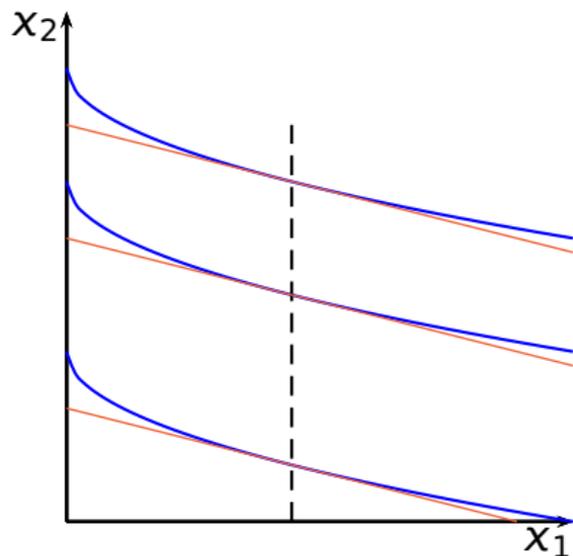
Características

- TMS depende exclusivamente de x_1 .
- Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$$

$$TMS = v'(x_1)$$

Preferências quase lineares



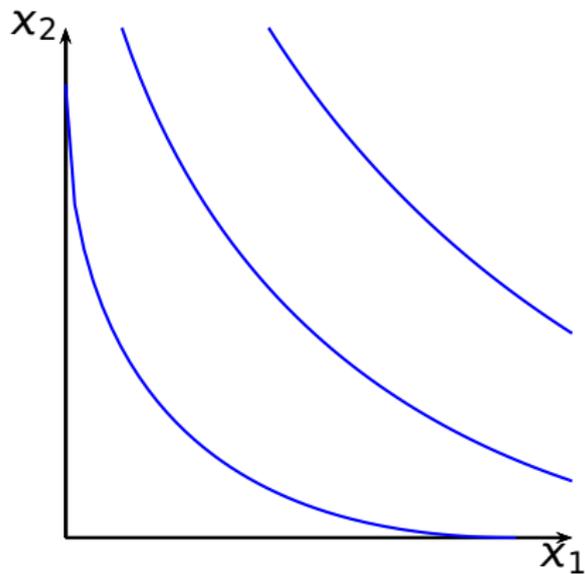
Características

- TMS depende exclusivamente de x_1 .
- Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$$

$$TMS = v'(x_1)$$

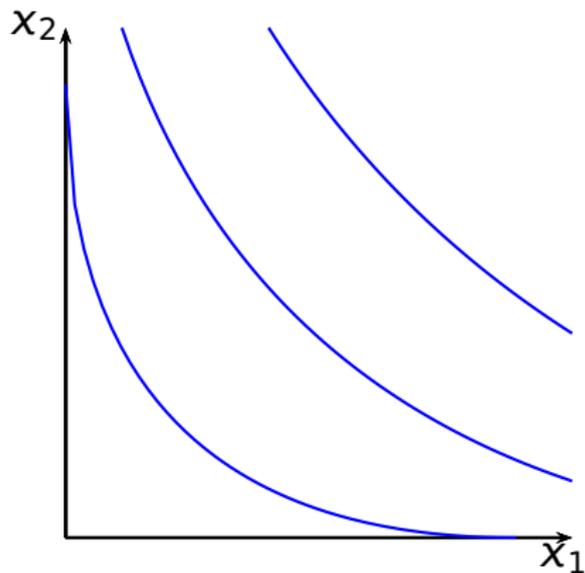
Preferências Homotéticas



Características:

- TMS depende apenas de x_2/x_1 .
- Sempre podem ser representadas por uma função de utilidade homogênea de grau 1 ou por uma transformação monotônica de tal função (funções homotéticas).

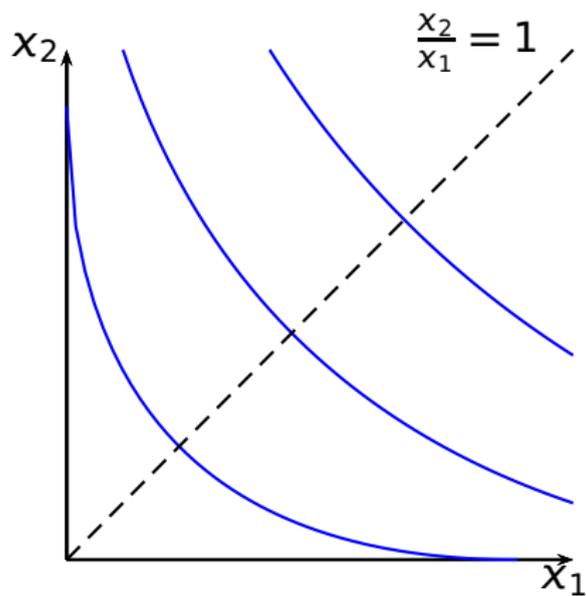
Preferências Homotéticas



Características:

- TMS depende apenas de x_2/x_1 .
- Sempre podem ser representadas por uma função de utilidade homogênea de grau 1 ou por uma transformação monotônica de tal função (funções homotéticas).

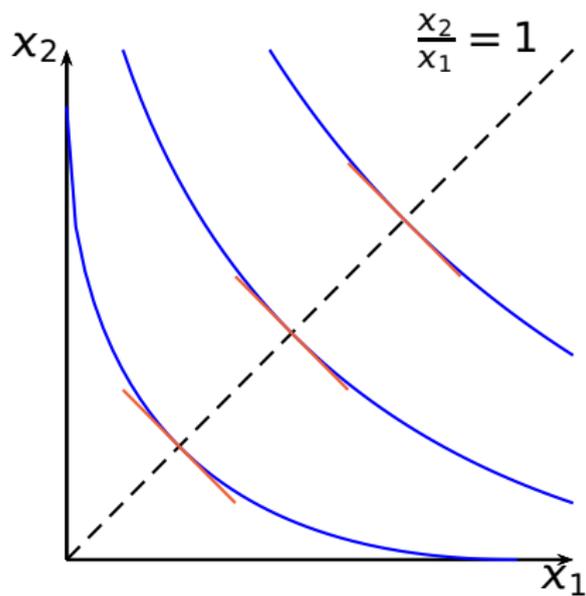
Preferências Homotéticas



Características:

- TMS depende apenas de x_2/x_1 .
- Sempre podem ser representadas por uma função de utilidade homogênea de grau 1 ou por uma transformação monotônica de tal função (funções homotéticas).

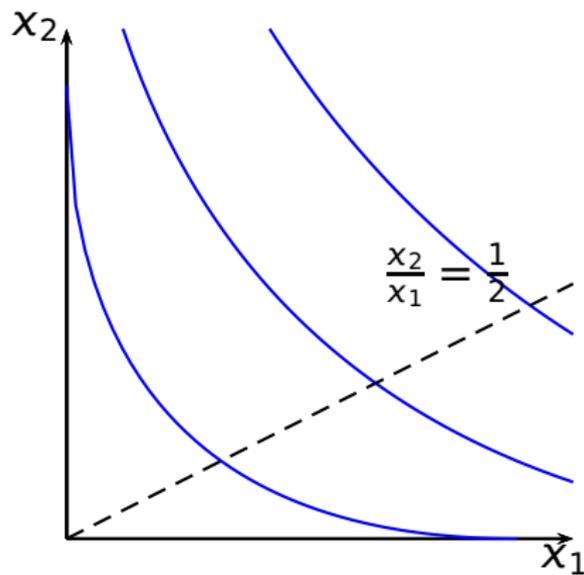
Preferências Homotéticas



Características:

- TMS depende apenas de x_2/x_1 .
- Sempre podem ser representadas por uma função de utilidade homogênea de grau 1 ou por uma transformação monotônica de tal função (funções homotéticas).

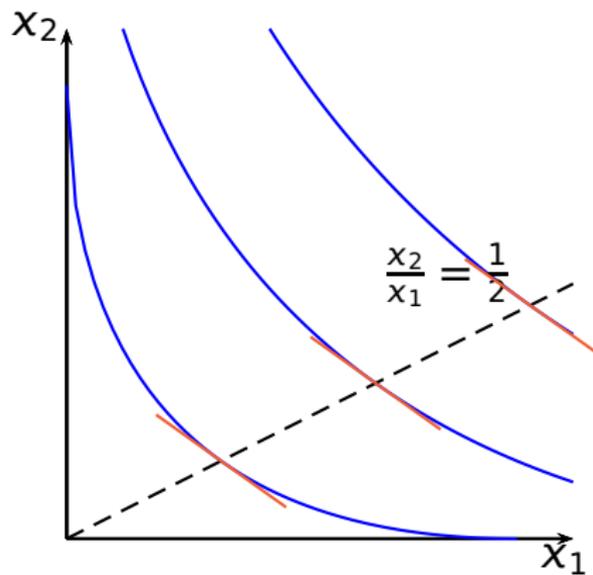
Preferências Homotéticas



Características:

- TMS depende apenas de x_2/x_1 .
- Sempre podem ser representadas por uma função de utilidade homogênea de grau 1 ou por uma transformação monotônica de tal função (funções homotéticas).

Preferências Homotéticas



Características:

- TMS depende apenas de x_2/x_1 .
- Sempre podem ser representadas por uma função de utilidade homogênea de grau 1 ou por uma transformação monotônica de tal função (funções homotéticas).

Exercícios

- 1 Mostre que, caso a função de utilidade seja homogênea de grau 1, a taxa marginal de substituição depende exclusivamente das razões entre as quantidades consumidas dos bens.
- 2 Sejam $U(x_1, x_2)$ uma função de utilidade, $f(u)$ uma função monotonicamente crescente definida na imagem de U e $V(x_1, x_2) = f(U(x_1, x_2))$. Mostre que a taxa marginal de substituição obtida a partir de V é a mesma que obtida a partir de U , isto é, mostre que

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_1} U(x_1, x_2)}{\frac{\partial}{\partial x_2} U(x_1, x_2)} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2)}{\frac{\partial}{\partial x_2} V(x_1, x_2)}$$

Exemplo: preferências Cobb-Douglas

$$U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Exemplo: preferências Cobb-Douglas

$$U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$TMS = \alpha \frac{x_2}{x_1}$$

Exemplo: preferências Cobb-Douglas

$$U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

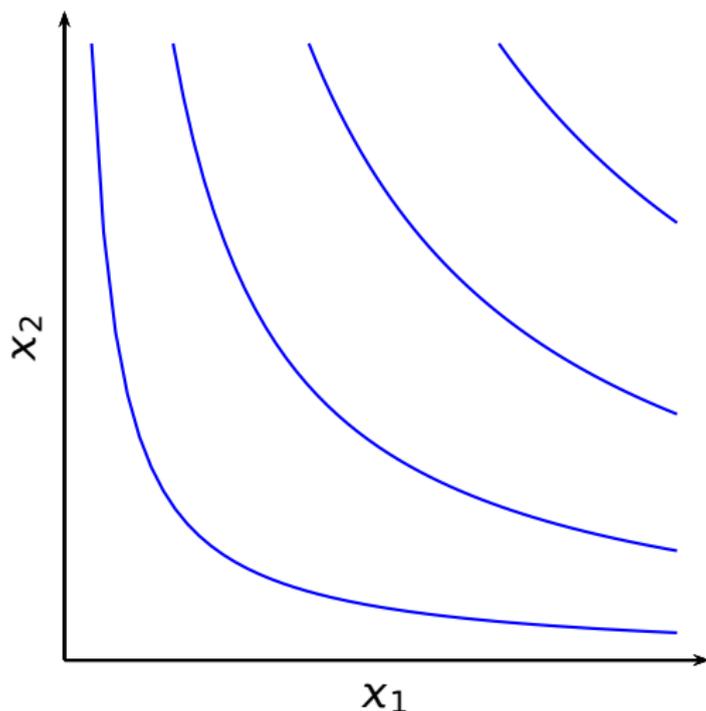
$$TMS = \alpha \frac{x_2}{x_1}$$

Variações

$$U(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta, \quad A, \alpha, \beta > 0$$

$$U(x_1, x_2) = \alpha \log x_1 + (1 - \alpha) \log x_2; \quad 0 < \alpha < 1$$

Curvas de indiferença para preferências Cobb-Douglas $\alpha = 1$



Exemplo: função de utilidade CES

$$U(x_1, x_2) = [\alpha x_1^\rho + (1 - \alpha)x_2^\rho]^{1/\rho}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$TMS = -\frac{\alpha}{1 - \alpha} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1-\rho}$$

Outra formulação

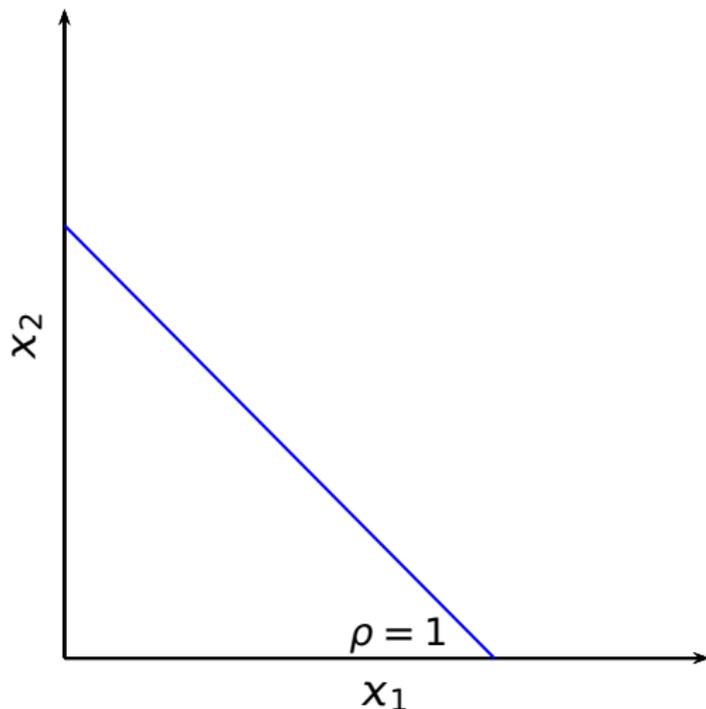
$$U(x_1, x_2) = [\alpha x_1^{(\sigma-1)/\sigma} + (1 - \alpha)x_2^{(\sigma-1)/\sigma}]^{\sigma/(\sigma-1)}$$

Exercício

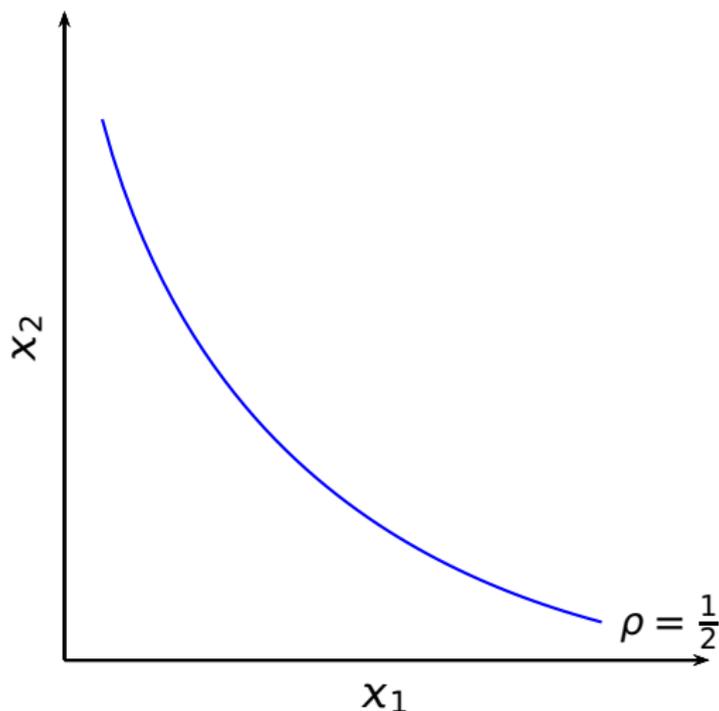
Mostre que, quando ρ tende a zero, a função de utilidade CES tende a uma função de utilidade Cobb-Douglas com a forma

$$U(x_1, x_2) = x_1^\alpha + x_2^{1-\alpha}$$

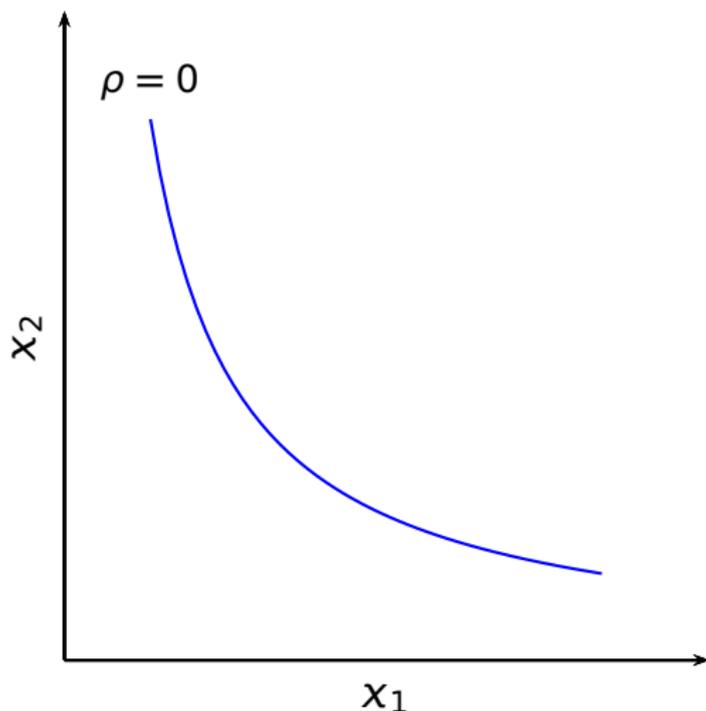
Curva de indiferença para uma função de utilidade CES para diferentes valores de ρ



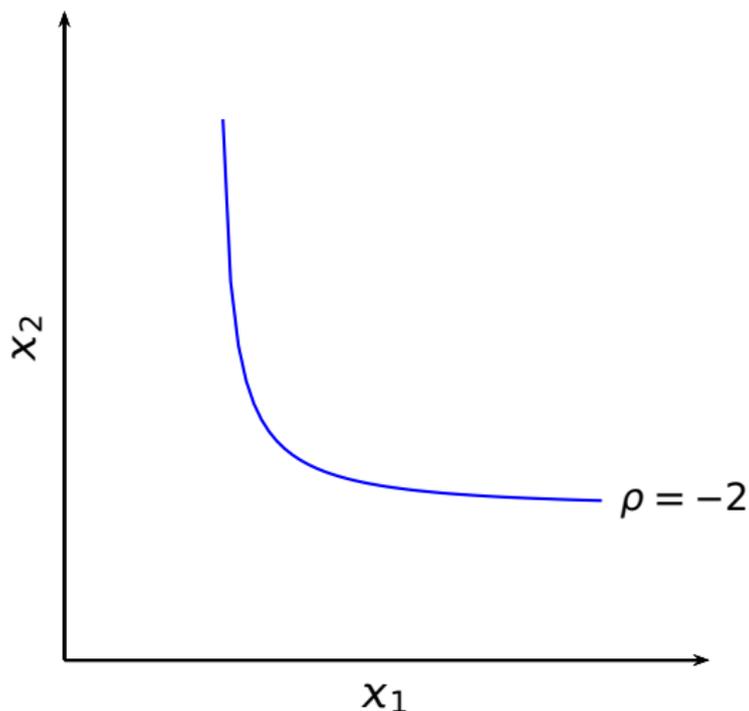
Curva de indiferença para uma função de utilidade CES para diferentes valores de ρ



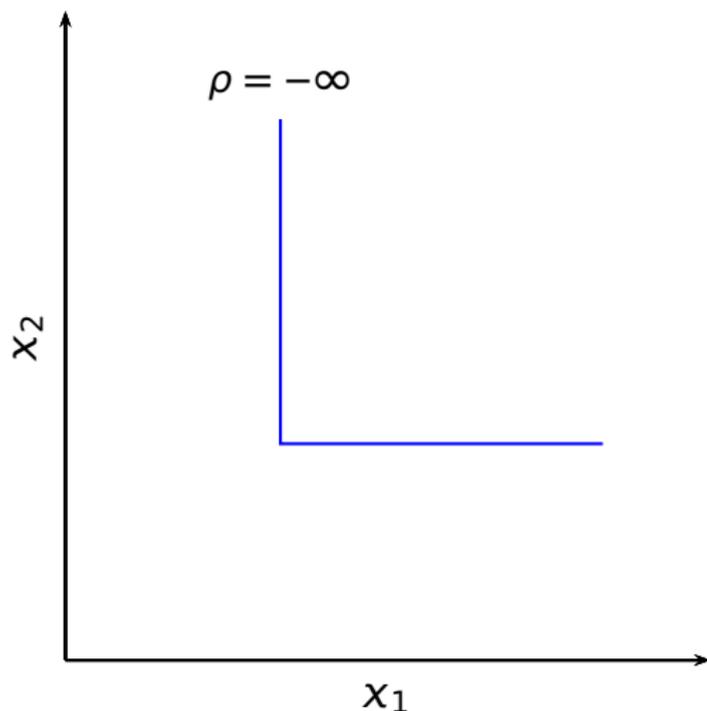
Curva de indiferença para uma função de utilidade CES para diferentes valores de ρ



Curva de indiferença para uma função de utilidade CES para diferentes valores de ρ



Curva de indiferença para uma função de utilidade CES para diferentes valores de ρ



Curva de indiferença para uma função de utilidade CES para diferentes valores de ρ

