Parte II – Teoria da Firma

Custos

Roberto Guena de Oliveira

9 de maio de 2018

USP

Sumário

Conceitos básicos

Custos econômicos e custos contábeis

- Custos contábeis são os custos medidos em termos de valores pagos por uma firma na aquisição de seus insumos de produção.
- Custos econômicos ou custos de oportunidade são os custos medidos em termos do ganho advindo do melhor uso alternativo dos insumos de produção.
- As diferenças entre custos contábeis e econômicos envolvem:
    - Os custos contábeis são baseados em valores no momento da aquisição dos bens, os custos econômicos são baseados nos valores atuais.
    - Custos contábeis não incluem custos implícitos, custos econômicos, sim. Talvez o mais importante dos custos implícitos seja o custo de oportunidade do capital.

A função de custo

A função de custo

A função de custo é uma função que associa a cada cada quantidade de produto y, o custo total (CT) mínimo no qual a firma deve incorrer para produzir essa quantidade. Evidentemente, esse custo depende, além da quantidade produzida, dos preços dos insumos de produção. Assim, no caso em que há apenas dois insumos de produção, x_1 e x_2, com preços ω_1 e ω_2, a função de custo terá a forma

$$CT = c(\omega_1, \omega_2, y).$$

A função de custo de curto prazo

Caso um ou mais fatores de produção sejam fixos (curto prazo), a função de custo também terá por argumento a quantidade do fator de produção que é mantido fixo. Por exemplo, caso x_2 seja mantido fixo em $\overline{x}_2$, então a função de custo (de curto prazo) terá a forma

$$CT = c(\omega_1, \omega_2, y, \overline{x}_2).$$

Custos fixo e variável

O custo total (CT) de uma empresa pode ser dividido em

Custo Variável ($CV(\omega_1, y)$) trata-se da parcela do custo correspondente à contratação de fatores variáveis.

Custo Fixo (CF) trata-se da parcela do custo correspondente à contratação de fatores fixos. Caso todos os fatores de produção sejam variáveis, então o custo fixo será nulo e o custo total coincidirá com o custo variável.

Portanto temos,

$$CT = CV + CF$$

A função de custo com apenas um fator variável

Suponha uma firma que produza empregando apenas dois insumos de produção, x_1 e x_2, sendo que o segundo insumo é empregado em quantidade fixa $x_2 = \overline{x}_2$. Seja $y = f(x_1, x_2)$ a sua função de produção. Então a função de custo de curto prazo dessa empresa será dada por

$$c(\omega_1, \omega_2, y, \overline{x}_2) = \omega_1 x_1(y, \overline{x}_2) + \omega_2 \overline{x}_2$$

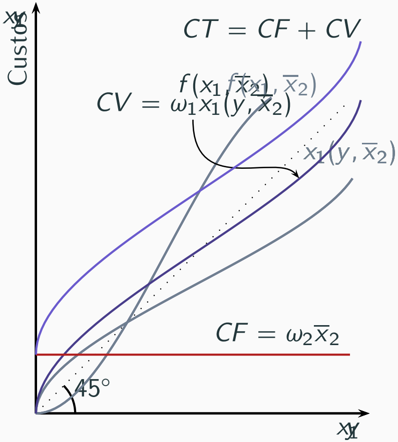
na qual $x_1(y, \overline{x}_2)$ é uma função definida por

$$f(x_1(y, \overline{x}_2), \overline{x}_2) = y.$$

$\omega_1 x_1(y, \overline{x}_2)$ é o custo variável. $\omega_2 \overline{x}_2$ é o custo fixo.

Obtenção da função de custo de curto prazo

1. Inverta a função de produção $f(x_1, \overline{x}_2)$ para encontrar a função $x_1(y, \overline{x}_2)$.
2. $CV = \omega_1 x_1(y, \overline{x}_2)$.
3. $CF = \omega_2 \overline{x}_2$.
4. $CT = c(\omega_1, \omega_2, y, \overline{x}_2)$
   $= \omega_2 \overline{x}_2 + \omega_1 x_1(y, \overline{x}_2)$



Exemplo: função de produção Cobb-Douglas

$$y = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}.$$

$$x_1(y, x_2) = \left(\frac{y}{Ax_2^{\beta}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

$$CV(\omega_1, y, x_2) = w_1 \left(\frac{y}{Ax_2^{\beta}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

$$CF = \omega_2 x_2,$$

$$c(\omega_1, \omega_2, y, x_2) = \omega_1 \left(\frac{y}{Ax_2^{\beta}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \omega_2 x_2.$$

O problema de minimização de custos mais de um fator variável

No caso geral com mais de um fator variável, a função de custo é obtida através da solução do seguinte problema:

$$\min_{x_1,\ldots,x_n} \ \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots + \omega_n x_n$$

$$\text{tal que } f(x_1,\ldots,x_n) \geq y$$

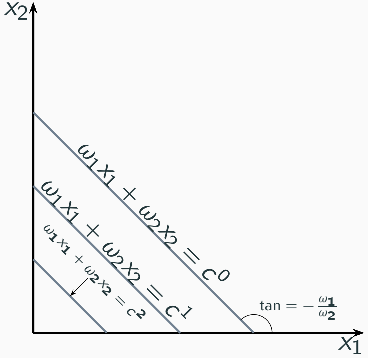
notas

- As quantidades dos insumos que resolvem esse problema são chamadas demandas condicionadas ou contingentes desses insumos, sendo notadas por $x_i^c(\omega_1,\ldots,\omega_n,y)$.
- A função de custo será dada por

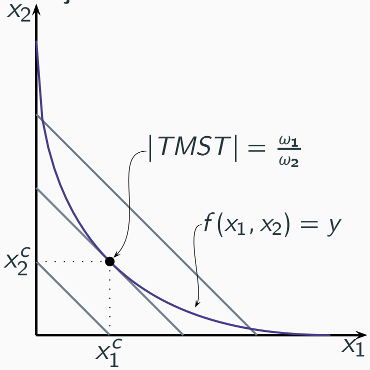
$$c(\omega_1,\ldots,\omega_n,y) = \omega_1 x_1^c(\omega_1,\ldots,\omega_n,y) + \ldots + \omega_n x_n^c(\omega_1,\ldots,\omega_n,y)$$

Solução gráfica: dois insumos variáveis

Curvas de isocusto



Solução



Minimização de custos: solução matemática

O problema

$$\min_{x_1,\ldots,x_n} \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots + \omega_n x_n$$

$$\text{tal que } f(x_1, \ldots, x_n) \geq y \quad \text{e} \quad x_1, \ldots x_n \geq 0$$

O lagrangeano

$$\mathscr{L} = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_n x_n - \lambda(f(x_1, \ldots, x_n) - y)$$

Minimização de custos: solução matemática

$$\omega_i \geq \lambda \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad x_i \left[\omega_i - \lambda \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \right] = 0$$

Se, na solução, $x_i > 0$, teremos, então

$$\lambda = \frac{\omega_i}{PMg_i}.$$

ω_i / PMg_i é o custo marginal da variação no produto atráves do emprego do insumo i.

Minimização de custos: solução matemática

Se, na solução, $x_i, x_j > 0$,

$$\frac{\omega_i}{PMg_i} = \lambda = \frac{\omega_j}{PMg_j}.$$

Portanto, o custo marginal da variação da produção através do emprego do insumo i é igual ao custo marginal da variação da produção através do emprego do insumo j, desde que os dois sejam empregados positivamente. Chamaremos esse custo, λ, de, simplesmente, custo marginal.

No caso de um insumo com emprego nulo na solução de custo mínimo, o custo marginal de aumentar a produção será maior ou igual a λ.

Exemplo: função de produção Cobb-Douglas

Função de produção:

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

Condições de primeira ordem:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = y & \Rightarrow \quad Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta} = y \\ |TMST| = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} & \Rightarrow \quad \dfrac{\alpha}{\beta} \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} \end{cases}$$

Exemplo: função de produção Cobb-Douglas

As demandas condicionais:

$$x_1(\omega_1, \omega_2, y) = \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

$$x_2(\omega_1, \omega_2, y) = \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

A função de custo:

$$\begin{aligned} c(\omega_1, \omega_2, y) &= \omega_1 x_1(\omega_1, \omega_2, y) + \omega_2 x_2(\omega_1, \omega_2, y) \\ &= \left[\frac{y}{A}\left(\frac{\omega_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{\omega_2}{\beta}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} (\alpha+\beta) \end{aligned}$$

Propriedades:

- O multiplicador de Lagrange associado ao problema de minimização de custo pode ser interpretado como o custo marginal, isto é
$$\lambda = \frac{\partial c(\omega_1, \ldots, \omega_2, y)}{\partial y}$$
- A função de custo é não decrescente em relação aos preços dos insumos e em relação ao produto.
- A função de custo é côncava em relação aos preços dos insumos
- Caso a função de custo seja diferenciável em relação ao preço do insumo i, teremos
$$\frac{\partial c(\omega_1, \ldots, \omega_2, y)}{\partial \omega_i} = x_i^c(\omega_1, \ldots, \omega_2, y)$$

Nota:

Quando se supõe os preços dos fatores de produção são mantidos inalterados, é comum notar a função de custo simplesmente por

$$c(y).$$

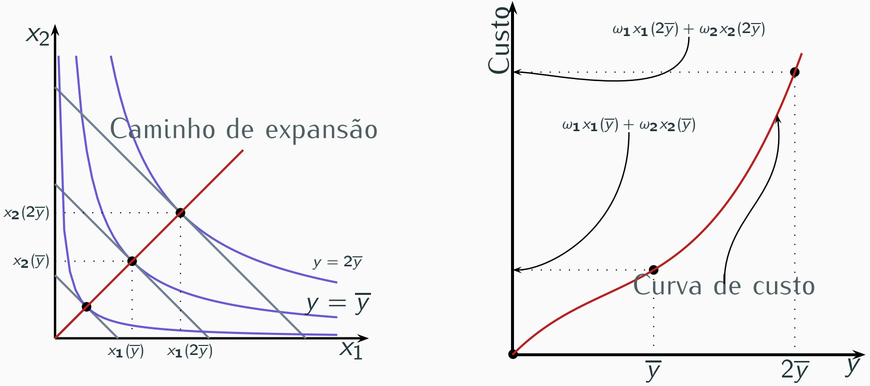
De modo análogo, as funções de demanda condicionais pelos insumos de produção são notadas por

$$x_1^c(y) \qquad \text{e} \qquad x_2^c(y)$$

ou ainda, simplesmente,

$$x_1(y) \qquad \text{e} \qquad x_2(y)$$

Caminho de expansão e curva de custo



Medidas de custo unitário

Custos unitários

Custo Médio (*CM*)

$$CM = \frac{CT}{y}$$

Custo Variável Médio (*CVM*)

$$CVM = \frac{CV}{y}$$

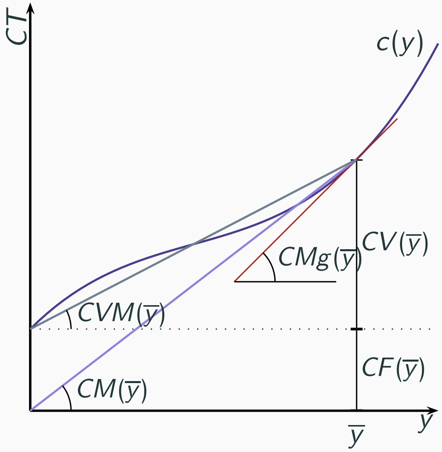
Custo Fixo Médio (*CFM*)

$$CFM = \frac{CF}{y}$$

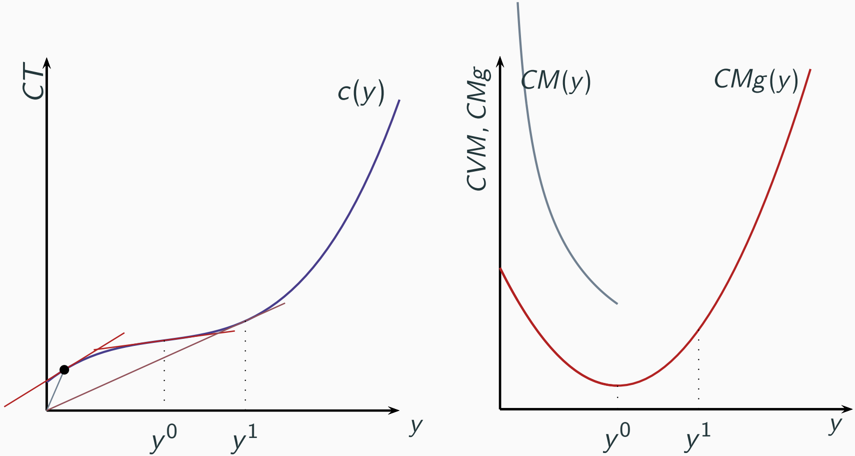
Custo Marginal (*CMg*)

$$CMg = \frac{\partial CT}{\partial y} = \frac{\partial CV}{\partial y}$$

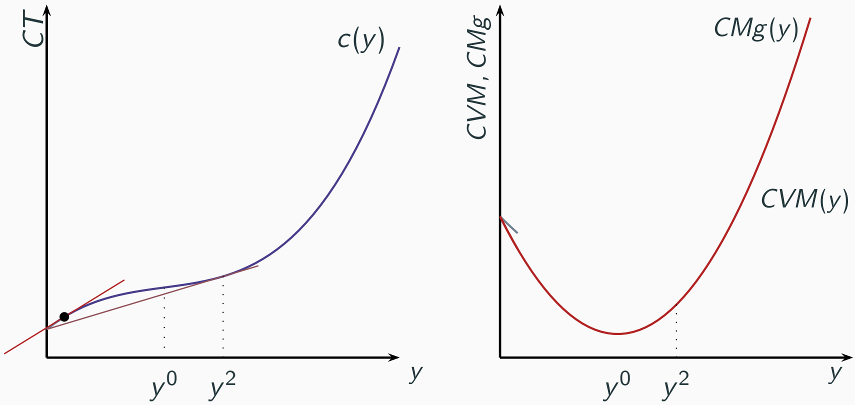
A geometria dos custos: inclinações



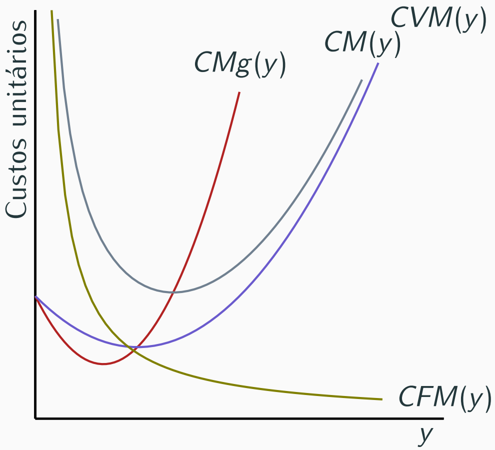
As curvas de custo marginal e médio



As curvas de custo marginal e variável médio



As curvas de custo unitário



Relações entre custos médios e custo marginal

Custo médio e custo marginal
Inclinação da curva de custo médio:

$$\frac{dCM(y)}{dy} = \frac{d\frac{CT(y)}{y}}{dy} = \frac{yCMg - CT}{y^2} = \frac{CMg(y) - CM(y)}{y}$$

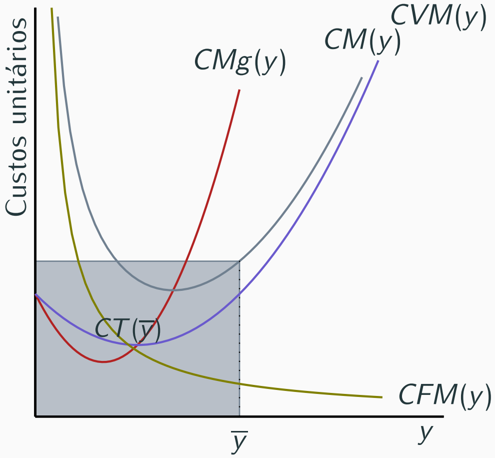
Custo variável médio e custo marginal
Inclinação da curva de custo variável médio:

$$\frac{dCVM(y)}{dy} = \frac{d\frac{CV(y)}{y}}{dy} = \frac{yCMg - CV}{y^2} = \frac{CMg(y) - CVM(y)}{y}.$$

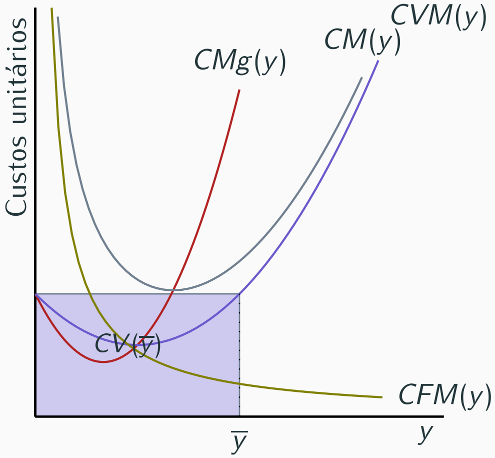
Valor do custo variável médio quando produção é nula:

$$\lim_{y \to 0} CVM = \lim_{y \to 0} \frac{CV(y)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{CV(y) - CV(0)}{y - 0} = CMg$$

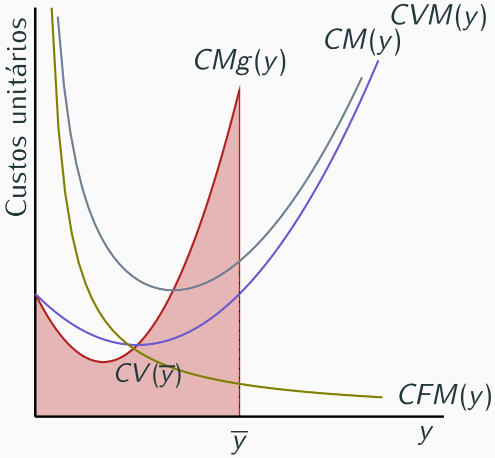
Geometria dos custos:áreas



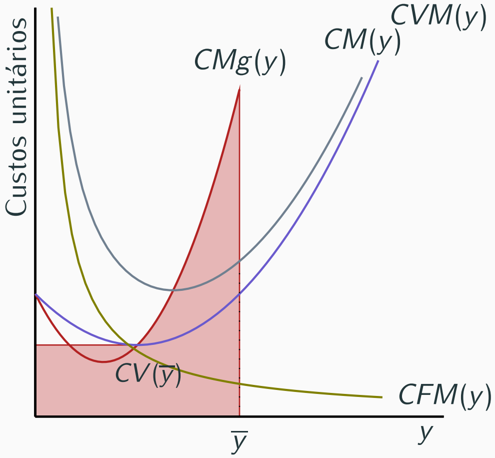
Geometria dos custos:áreas



Geometria dos custos:áreas



Geometria dos custos:áreas



Curto e longo prazos

Curto e longo prazos

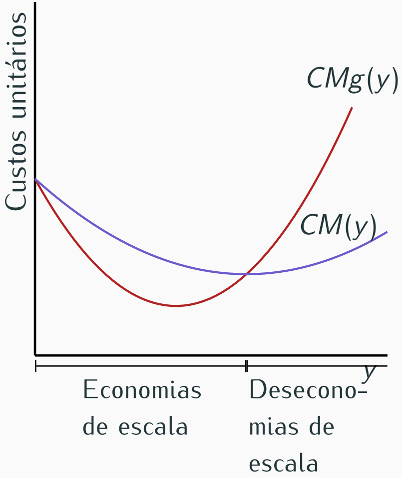
Curto prazo

- Um ou mais fatores são fixos e, portanto, parte do custo é fixa.
- Custo total e custo variável são diferentes, mesmo ocorrendo com os custos médio e variável médio.

Longo prazo

- Não há fatores fixos: todos os custos são variáveis.
- Custo total e custo variável são iguais, mesmo ocorrendo com os custos médio e variável médio.

Diz-se que uma função de custo de longo prazo apresenta economias de escala caso o custo médio seja decrescente em relação à produção.



Elasticidade produto do custo $\epsilon_{c,y}$

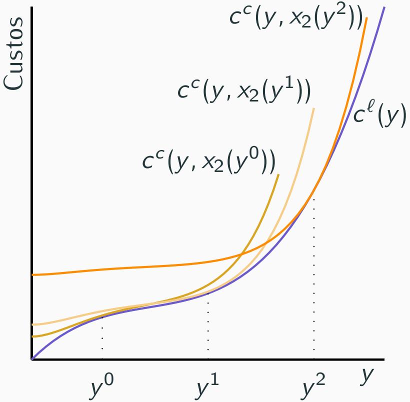
Trata-se de uma medida pontual para economias de escala definida por

$$\epsilon_{c,y} = \frac{dc(y)}{dy}\frac{y}{c(y)} = \frac{CMg(y)}{CM(y)}.$$

É possível mostrar que

$$\epsilon_{c,y} = \left[\frac{PMg_1}{PM_1} + \frac{PMg_2}{PM_2}\right]^{-1}$$

As curvas de custo de longo e de curto prazos



Fatores e custos quase fixos

Um fator de produção, i, é dito quase fixo em um intervalo de produção (y_0, y_1) caso

1. $x_i(0) = 0$; e
2. $y \in (y_0, y_1) \Rightarrow x_i(y) = x_i^f$,

em que x_i^f é uma constante.

O custo de aquisição do fator fixo é chamado custo quase fixo.

Tópicos adicionais

Economias de escopo

Seja $c(q_1, q_2)$ a função que descreve o custo de uma empresa em relação às quantidades obtidas de seus dois produtos, q_1 e q_2. Dizemos que essa empresa apresenta economias de escopo caso, para $q_1^* > 0$ e $q_2^* > 0$ tivermos

$$c(q_1^*, 0) + c(0, q_2^*) > c(q_1^*, q_2^*)$$

Definição

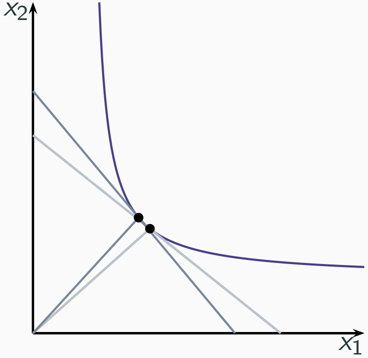
$$\sigma = \frac{d\frac{x_2}{x_1}}{d|TMST|}\frac{|TMST|}{\frac{x_2}{x_1}}$$

Interpretação
Em que percentual deve variar a relação $x_2(y)/x_1(y)$ caso o preço relativo ω_1/ω_2 varie 1%.

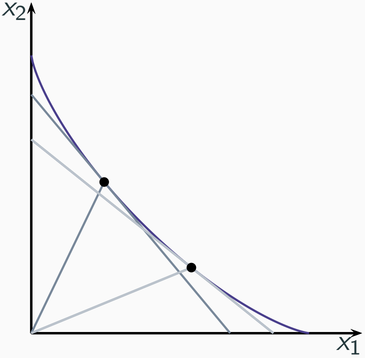
De quanto porcento varia a razão x_2/x_1 quando caminhamos ao longo da isoquanta até que a $TMST$ varie em 1%?

Exemplos gráficos

σ baixa



σ elevada



Exemplo: função de produção Cobb-Douglas

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$
$$|TMST| = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1}$$
$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\beta}{\alpha}|TMST|$$

Usando as regras da função identidade e do produto por uma constante para o cálculo da elasticidade, obtemos

$$\sigma = 1.$$

Exemplo: função de produção CES

$$f(x_1, x_2) = A\left[ax_1^{\rho} + (1-a)x_2^{\rho}\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$$

$$|TMST| = \frac{a}{1-a}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \left(\frac{1-a}{a}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}|TMST|^{\frac{1}{1-\rho}}.$$

Usandos as regras do produto por uma constante e da potência para o cálculo da elasticidade, obtemos

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho}.$$

Exercícios ANPEC

Questão 5 — ANPEN 2018

Com relação aos custos de produção, indique quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

0. Quando há níveis discretos do fator fixo, a curva de custo marginal de longo prazo será composta por trechos das curvas de custo marginal de curto prazo associados a cada nível de fator fixo; V
1. No caso de uma empresa com duas fábricas, a curva de custo marginal de curto prazo da empresa é a soma vertical das curvas de custo marginal de curto prazo das duas fábricas; F

Questão 5 — ANPEC 2018

Com relação aos custos de produção, indique quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

2. A função de custo total quadrática do tipo $\text{CT} = aq + bq^2$ resulta em uma curva de custo marginal linear; V
3. Uma função de custo total cúbica do tipo $\text{CT} = aq + bq^2 + cq^3$ resulta em curvas de custo médio e marginal em forma de U; V
4. Custos quase fixos independem do nível de produção, mas só precisam ser pagos se a empresa produzir uma quantidade positiva de bens. V

Questão 7 — ANPEC 2017

Uma firma apresenta função de produção dada por $Y(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$. Julgue as afirmativas, considerando constantes os preços do produto e dos insumos:

⓪ Se $A = 1$, $\alpha = \beta = 0,25$, então o produto marginal do trabalho será decrescente e a curva de custo total de longo prazo será convexa em relação à origem; V

① Se $A = 2$, $\alpha = \beta = 0,5$, então qualquer plano radial que corta a função de produção, mantendo-se qualquer proporção capital-trabalho constante, resultará em cortes que são linhas retas; V

② Se $A = 1$, $\alpha = \beta = 0,75$, então a curva de custo total no curto prazo será côncava em relação à origem, como também a função custo total no longo prazo; F

Questão 7 — ANPEC 2017

Uma firma apresenta função de produção dada por $Y(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$. Julgue as afirmativas, considerando constantes os preços do produto e dos insumos:

3. Se $A = \alpha = \beta = 1$, então o custo marginal do capital no curto prazo será linear e a curva de custo médio de longo prazo será decrescente; F
4. Se $A = 1$ e $\alpha = \beta = 1,25$, então o custo marginal no curto prazo será crescente e as curvas de isoquantas não serão convexas. F

Questão 5 — ANPEC 2016

Em relação à teoria da produção, é correta afirmar que:

0. A elasticidade de substituição para uma função de produção $Q = AL^a K^b$ é a/b. F
1. Uma função de produção do tipo $Q = (L^p + K^p)^{1/p}$, com $p > 0$, apresenta no limite uma taxa marginal de substituição igual a $-K/L$, quando p tende a zero; V
2. Quando a função de produção da empresa consegue produzir mais do que antes, com a quantidade de insumos na mesma proporção, diz-se que ela experimentou progresso técnico neutro; F (difere do gabarito)

Questão 5 — ANPEC 2016

Em relação à teoria da produção, é correto afirmar que:

3. Uma função de produção do tipo $Q = (L^p + K^p)^{1/p}$, com p>0, no limite tende a uma Cobb-Douglas, quando p tende a zero; V
4. Uma função de produção do tipo $Q = (L^p + K^p)^{1/p}$, com p>0, apresenta uma elasticidade de substituição infinita, quando $p = 1$. V.

Questão 6 – ANPEC 2016

Com relação à teoria dos custos, é correto afirmar que:

0. Um imposto específico de \$10 por unidade desloca tanto a curva de custo marginal, quando a curva de custo médio, em \$10; **V**
1. O caminho de expensão para uma função de produção $Q = AK^aL^{1-a}$, com $0 < a < 1$, pode ser determinado pela fórmula: $K = [(1-a)/a](w/r)L$; **F**
2. Uma curva de aprendizado apresenta a relação entre custos médio e produção acumulada; **V**

Questão 6 – ANPEC 2016

Com relação à teoria dos custos, é correto afirmar que:

3. No longo prazo, com a função de produção $Y(K, L) = \min\{K, L\}$, temos retornos decrescentes de escala e as curvas de custo médio e marginal coincidem; F
4. Sendo $C(q_1, q_2)$ o custo de produção conjunta de dois bens q_1 e q_2, $C(q_1, 0)$ o custo de produzir q_1 isoladamente e $C(0, q_2)$ o custo de produzir q_2 isoladamente, se $[C(q_1, 0) + C(0, q_2) - C(q_1, q_2)]/C(q_1, q_2) < 0$, então há deseconomias de escopo. V

Questão 6 — ANPEC 2015

Uma firma produz um bem Y, utilizando a função de produção $Y(L,K) = LK$, sendo $w = \$2$ e $r = \$1$ os preços unitários dos insumos trabalho (L) e capital (K), respectivamente. Julgue as assertivas:

⓪ A função de produção apresenta, ao mesmo tempo, retornos crescentes de escala e produtos marginais decrescentes. F

① Dados os preços dos insumos, as funções de demanda pelos fatores em função da quantidade produzida são: $K(Y) = \sqrt{Y/2}$ e $L(Y) = \sqrt{2Y}$. F

② A função custo total de longo prazo é dada por $CT(Y) = 2\sqrt{2Y}$. V

Questão 6 — ANPEC 2015

Uma firma produz um bem Y, utilizando a função de produção $Y(L, K) = LK$, sendo $w = \$2$ e $r = \$1$ os preços unitários dos insumos trabalho (L) e capital (K), respectivamente. Julgue as assertivas:

3. Dado o retorno de escala desse caso, a curva de custo médio de longo prazo está acima da curva de custo marginal de longo prazo, sendo ambas decrescentes. V
4. No curto prazo, se a firma possuir somente uma unidade de capital, o custo total de produzir oito unidades será \$9 a mais do que o custo no longo prazo. V