Risco

Roberto Guena de Oliveira

16 de novembro de 2015

Retorno de uma ação

Sejam

P_t O preço pago na aquisição de uma ação na data t;

Div_{t+1} os dividendos pagos por essa ação na data $t+1$;

P_{t+1} o valor de mercado dessa ação na data $t+1$.

Definimos

Retorno em reais em um ano

$$Div_{t+1} + P_{t+1} - P_t$$

Em que $P_{t+1} - P_t$ é o ganho (ou perda, caso negativo) de capital.

Taxa de retorno em um ano

$$R = \frac{Div_{t+1} + P_{t+1} - P_t}{P_t}$$

Retorno de uma ação

$$R = \frac{Div_{t+1}}{P_t} + \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}$$

em que

$\frac{Div_{t+1}}{P_t}$ é chamado rendimento de dividendos; e

$\frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}$ é chamado ganho de capital ou taxa de ganho de capital.

Retorno de uma ação retida por vários períodos

Supondo-se que todos os dividendos recebidos serão sejam reinvestidos na mesma ação, sua taxa de retorno entre a data zero e a data T é

$$(1+R_1)\times(1+R_2)\times(1+R_3)\times\cdots\times(1+R_t)-1$$

Fatos estilizados

- Os retornos ano a ano de ações oscilam muito mais do que os retornos de alguns títulos tais como os títulos de curto prazo do tesouro americano.
- O retorno em longos períodos de retenção de ações, todavia, são significativamente maiores do que os de títulos de curto prazo do tesouro americano.

Estatísticas relativas ao retorno

Retorno médio

$$\overline{R} = \frac{R_1 + R_2 + \cdots + R_T}{T}$$

Variância σ^2 e desvio padrão σ

$$\sigma^2 = \frac{(R_1 - \overline{R})^2 + (R_2 - \overline{R})^2 + \cdots + (R_T - \overline{R})^2}{T - 1}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Observação: as fórmulas acima são para os estimadores amostrais da variância e do desvio padrão da população.

Hipótese usual

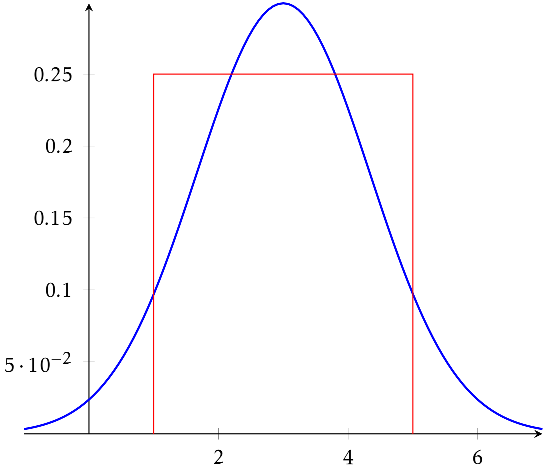
Assumiremos que as únicas informações relevantes para a composição de uma carteira de ativos por parte de um investidor são o retorno médio e a variância do retorno dessa carteira. Essa hipótese requer que:

- As preferências dos investidores sejam tais que apenas a média e a variância de sua riqueza sejam levadas em consideração em decisões envolvendo risco; e/ ou
- As distribuições de probabilidades de todas as carteiras de ativos sejam inteiramente definidas de acordo com a média e a variância do retorno dessa carteira.

Assumiremos que, entre duas carteiras com a mesma rentabilidade, o investidor prefere aquela com menor desvio padrão.

Ilustração das limitações dessa hipótese

As duas distribuições de densidade plotadas abaixo de probabilidades possuem mesmas média e variância:



Diversificação: exemplo

João deve levar o leite de sua fazenda para uma vila onde será vendido. O caminho para a vila é escorregadio e há uma chance de 25% de que João caia e perca o leite que carrega. Se levar o leite em mais de uma viagem, a probabilidade de que ele caia em cada viagem continua sendo de 25% e independe de ele ter caído ou não em outras viagens. Caso João faça 1, 2 ou 3 viagens, calcule as possíveis frações do leite transportado e salvo e suas probabilidades.

1 viagem

Fração salva	Probabilidade
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{3}{4}$

Diversificação: exemplo (continuação)

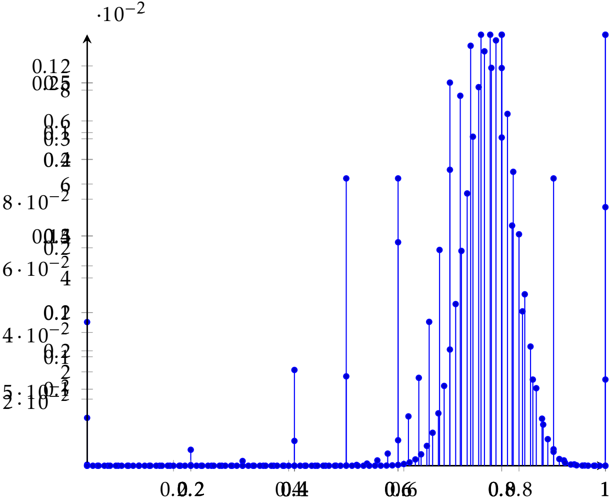
2 viagens

Fração salva	Probabilidade
0	$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{9}{16}$

3 viagens

Fração salva	Probabilidade
0	$\frac{1}{64}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{64}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{27}{64}$
1	$\frac{27}{64}$

Distribuição de probabilidades da parcela de leite salva — $n = 1n = 2n = 5n = 10n = 50n = 100$



Carteira com dois ativos: notação

R_1 **e** R_2 são os retornos dos ativos 1 e 2 respectivamente;

$\overline{R}_1$ **e** $\overline{R}_2$ são as esperanças desses retornos;

σ_1 **e** σ_1 são os desvios padrões desses retornos;

$\sigma_{1,2}\sigma_{2,1}$ é a covariância entre esses dois retornos;

$\rho = \dfrac{\sigma_{1,2}}{\sigma_1\sigma_2}$ é o coeficiente de correlação linear entre os dois retornos; $-1 \leq \rho \leq 1$. retornos;

V_1 **e** V_2 são os valores investidos nos ativos 1 e 2, respectivamente.

Carteira de dois ativos: retorno esperado

O valor obtido com a carteira de ativos em um ano será

$$F = (R_1 + 1) \times V_1 + (R_2 + 1) \times V_2.$$

O valor esperado é

$$\overline{F} = (\overline{R}_1 + 1) \times V_1 + (\overline{R}_2 + 1) \times V_2.$$

O retorno esperado é

$$\overline{R} = \frac{\overline{F}}{V_1 + V_2} - 1 = \frac{V_1}{V_1 + V_2}\overline{R_1} + \frac{V_2}{V_1 + V_2}\overline{R_2}.$$

ou, fazendo $s_1 = V_1/(V_1 + V_2)$ e $s_2 = V_2/(V_1 + V_2) = 1 - s_1$,

$$\overline{R} = s_1\overline{R}_1 + s_2\overline{R}_2.$$

Carteira com dois ativos: variância

$$\sigma^2 = s_1^2\sigma_1^2 + s_2\sigma_2^2 + 2s_1s_2\sigma_{1,2}$$

Substituindo $\sigma_{1,2}$ por $\rho\sigma_1\sigma_2$,

$$\sigma^2 = s_1^2\sigma_1^2 + s_2\sigma_2^2 + 2s_1s_2\rho\sigma_1\sigma_2.$$

Há três possibilidades:

Se $\rho = 1$ $\sigma^2 = s_1^2\sigma_1^2 + s_2\sigma_2^2 + 2s_1s_2\sigma_1\sigma^2 = (s_1\sigma_1 + s_2\sigma_2)^2$
ou,$\sigma = s_1\sigma_1 + s_2\sigma_2$;

se $\rho = -1$ $\sigma^2 = s_1^2\sigma_1^2 - s_2\sigma_2^2 + 2s_1s_2\sigma_1\sigma_2 = (s_1\sigma_1 - s_2\sigma_2)^2$ ou,
$\sigma = |s_1\sigma_1 - s_2\sigma_2|$;

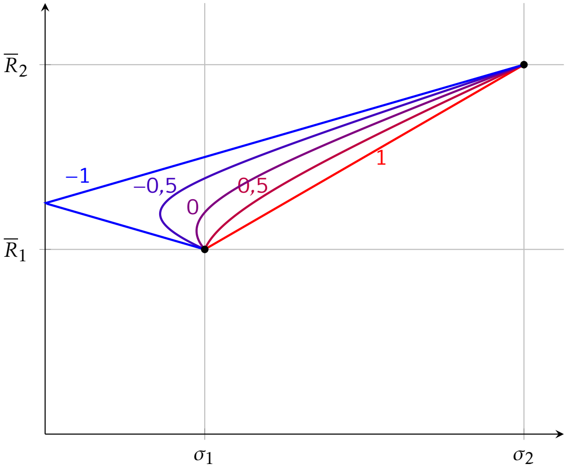
se $-1 < \rho < 1$ $\sigma^2 < (s_1\sigma_1 + s_2\sigma_2)^2$ ou,$\sigma < s_1\sigma_1 + s_2\sigma_2$.

Carteira com dois ativos: conclusão

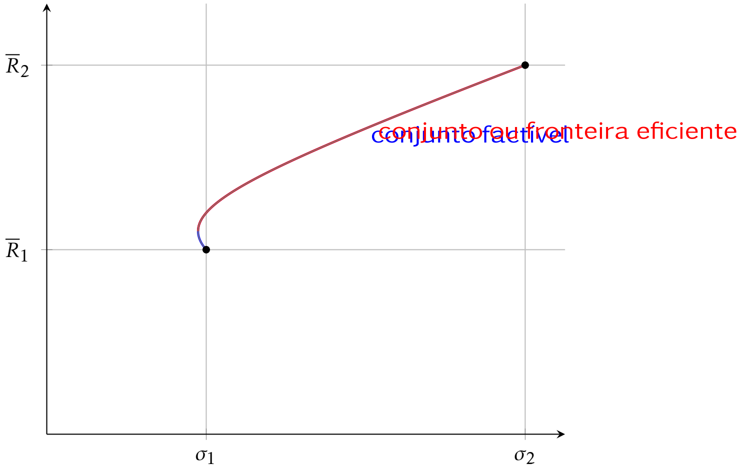
- A rentabilidade esperada é a média, ponderada pelas participações dos ativos na carteira, das rentabilidades esperadas desses ativos.
- Caso a correlação linear entre as rentabilidades dos dois ativos seja perfeita e positiva, o risco, medido pelo desvio padrão da rentabilidade, da carteira será a média entre os riscos dos ativos;
- Caso essa correlação linear seja menor do que 1, o risco da carteira será menor do que a média dos riscos dos ativos;
- Caso essa correlação linear seja perfeita, porém negativa, será possível eliminar todo o risco da carteira fazendo $s_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$.

Ilustração

Combinações de dois ativos conforme o coeficiente de correlação linear entre R_1 e R_2 para diferentes valores de ρ



O conjunto eficiente ou a fronteira eficiente



Carteira com diversos ativos: notação

- R_i rentabilidade do ativo i, $i = 1,2,\ldots,n$;
- $\overline{R}_i$ rentabilidade esperada do ativo;
- σ_i desvio padrão da rentabilidade do ativo i;
- $\sigma_{i,j}$ covariância entre as rentabilidades dos ativos i e j, $i,j = 1,2,\ldots,n$.
- s_i participação (em valor) do ativo i na carteira de investimentos;
- R rentabilidade da carteira de ativos;
- $\overline{R}$ restabilidade esperada dessa carteira;
- σ desvio padrão dessa rentabilidade.

Carteira com diversos ativos: indicadores de rentabiliade e risco

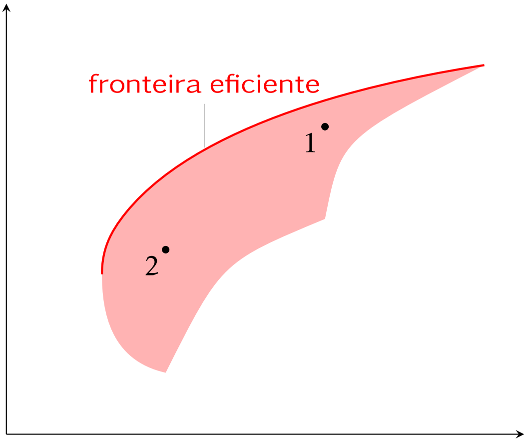
Rentabilidade esperada

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} s_i \overline{R}_i$$

Variância

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \dots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \dots & \sigma_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_i s_j \sigma_{i,j}$$

O conjunto factível para diversos ativos



Diversificação de portfolio: um exemplo

- Há diversos ativos todos com a mesma variância $\sigma_i^2 = \overline{\text{var}}$.
- Para quaisquer dois ativos i e j, $\sigma_{i,j} = \overline{\text{cov}}$.
- Nesse caso, a variância da rentabilidade esperada de uma carteira com n ativos, todos com a mesma participação $s_i = 1/n$, será
$$\frac{1}{n}\overline{\text{var}} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\overline{\text{cov}}.$$
- Portanto, à medida em que n aumenta, o risco do portfólio será cada vez mais determinado pela covariância entre os ativos e menos determinado pelas variâncias dos ativos específicos.
- A variância de cada ativo pode ser dividida em duas partes:

$$\underbrace{\begin{array}{c}\text{risco total}\\ \text{do ativo}\end{array}}_{(\overline{\text{var}})} = \underbrace{\begin{array}{c}\text{risco sistemátivo}\\ \text{ou não diversificável}\end{array}}_{(\overline{\text{cov}})} + \underbrace{\begin{array}{c}\text{risco não sistemático}\\ \text{ou diversificável}\end{array}}_{(\overline{\text{var}}-\overline{\text{cov}})}$$

Combinando um ativo com risco com um ativo livre de risco

Suponha que haja apenas dois ativos:

Um ativo com risco com retabiliade esperada $\overline{R}_1$ e desvio padrão σ_1

e

um ativo livre de risco com rentabiliade R_f.

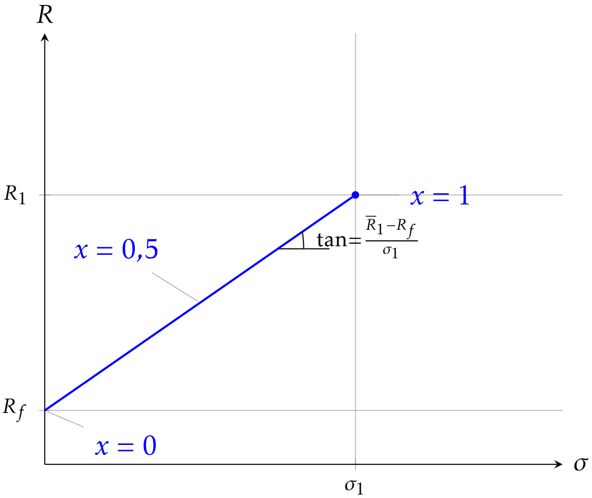
Se um investidor aplica uma parcela x de seu portfolio no ativo com risco e, portanto, uma parcela $1-x$ desse portfolio no ativo livre de risco então,

sua rentabilidade esperada será $\overline{R} = x\overline{R}_1 + (1-x)R_f$ e
a variância da rentabilidade do portfólio será $\sigma = x\sigma_1$.

Combinando os dois resultados, podemos escrever:

$$R = R_f + \sigma \frac{\overline{R}_1 - R_f}{\sigma_1}.$$

Ativo com risco e ativo livre de risco: ilustração gráfica



Aplicações com recursos emprestados

Suponha agora que o investidor possa tomar recursos emprestados pagando uma taxa de juros r, com $r \geq R_f$. Caso queira tomar recurso emprestado para realizar algum investimento, certamente será para investir no ativo com risco pois ele não obterá ganho investindo no ativo livre de risco. Sejam:

w o valor investido com recursos próprios no ativo livre de risco;

v o valor total do investimento realizado, de tal sorte que o montante que o investidou toma emprestado é $v - w$; e

$x = \frac{v}{w}$ a razão entre o total investido e o total aplicado com recursos próprios.

Aplicações com recursos emprestados

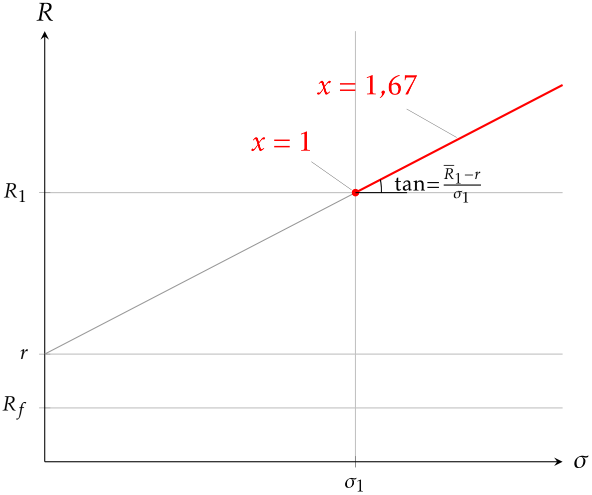
A rentabilidade esperada do investimento próprio do investidor será

$$\overline{R} = \frac{v\overline{R}_1 - (v-w)r}{w} = x\overline{R}_1 + (1-x)r.$$

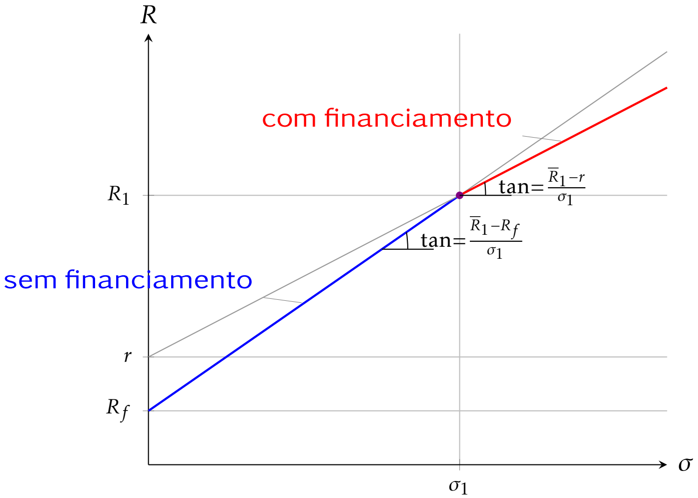
A variância dessa rentabilidade será $\sigma = x\sigma_1$. Combinando os dois resultados, chegamos a

$$\overline{R} = r + \sigma\frac{\overline{R}_1 - r}{\sigma_1}$$

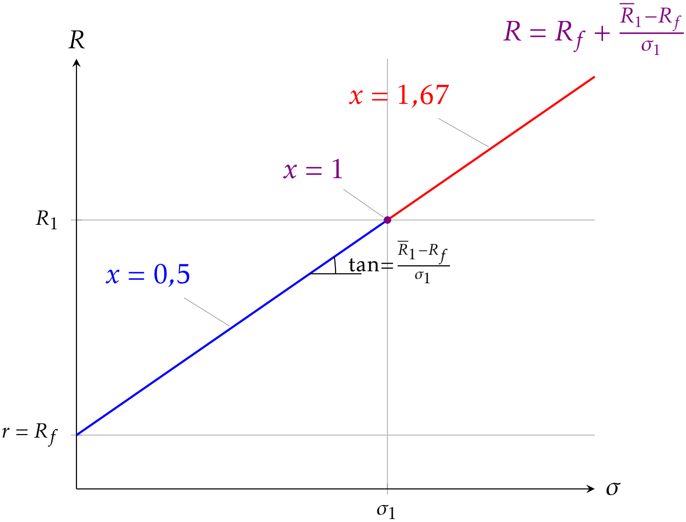
Aplicações com recurso emprestado



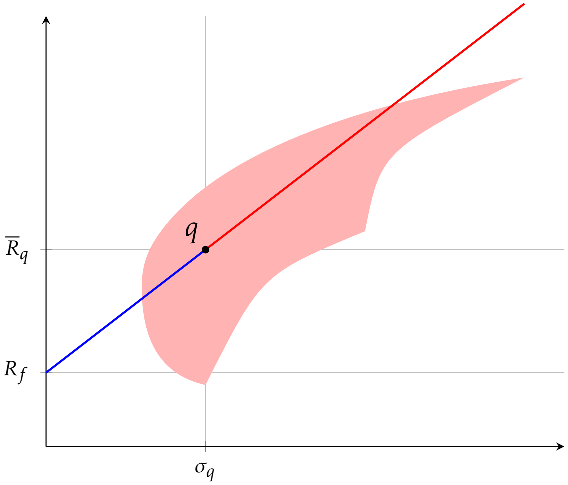
Aplicações com e sem recurso emprestado



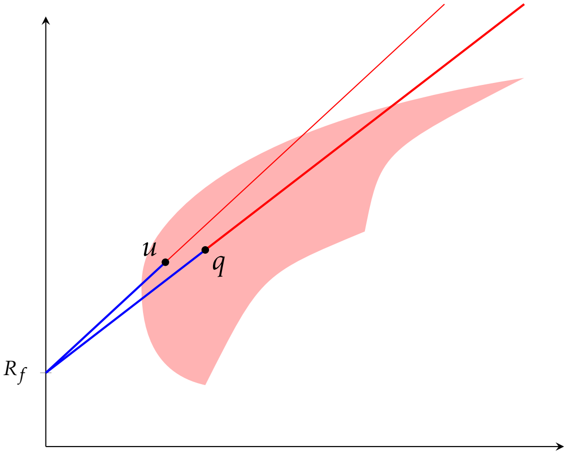
O caso em que $r = R_f$



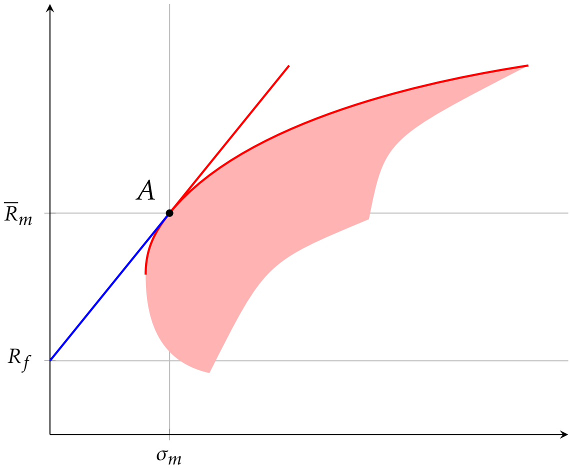
Combinação do ativo livre de risco com um portfólio factível de ativos com risco



O portfólio u domina o portfólio q



O portfólio ótimo é o portfólio factível que domina todos os outros



Equilíbrio de mercado

- O equilíbrio de mercado ocorre quando a soma das quantidades demandadas pelos consumidores de cada ativo, incluindo os ativos com risco, é igual à quantidade existente desse ativo.
- Se assumirmos que todos os investidores fazem as mesmas estimativas de retornos esperados, variâncias e covariâncias (hipótese de expectativas homogêneas) então todos os investidores deverão demandar o mesmo portfólio de ativos com risco (representado pelo ponto A no slide anterior).
- Esse portfólio é o portfólio de mercado, isto é, um portfólio em que cada ativo de risco entra em um proporção igual à proporção entre o valor do total existente desse ativo e o valor total de todos os ativos de risco do mercado.

Combinando um ativo com o mecado

Sejam

- m O portfólio de mercado com rentabilidade esperada $\overline{R}_m$ e desvio padrão σ_m;
- q um ativo de risco qualquer com rentabilidade esperada $\overline{R}_q$ e risco σ_q;
- $\sigma_{m,q}$ a covariância entre as rentabilidades esperadas do mercado e do ativo q, respectivamente.

Um portfólio com participações α no ativo q, $(0 \leq \alpha \leq 1)$, e $1-\alpha$ no portfólio de mercado, m, terá

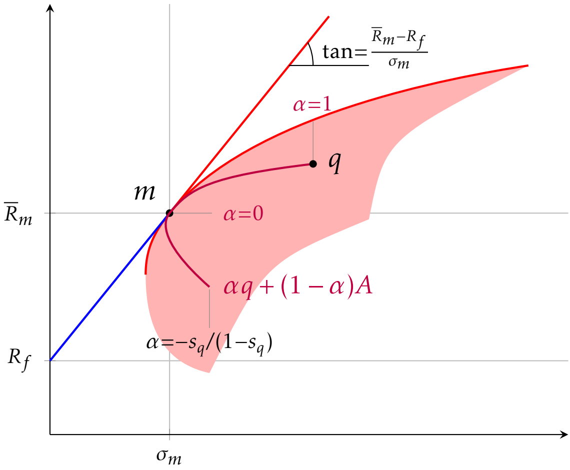
- Rentabilidade esperada igual a

$$\overline{R} = \alpha \overline{R}_q + (1-\alpha)\overline{R}_m;$$

- e risco igual a

$$\sigma = \sqrt{\alpha^2 \sigma_q^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_m (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{m,q}};$$

Combinações do mercado com um ativo de risco qualquer



Propriedade do ponto de equilíbrio

A curva das combinação de q e m tem, no ponto m, inclinação igual a $(\overline{R}_m - R_f)/\sigma_m$. A inclinação dessa curva também é igual a

$$\text{Inclinação} = \frac{d\overline{R}/d\alpha}{d\sigma/d\alpha}.$$

$$\frac{dR}{d\alpha} = \overline{R}_q - \overline{R}_m.$$

$$\frac{d\sigma}{\alpha} = \frac{2\alpha\sigma_q^2 - 2(1-\alpha)\sigma_m^2 + 2(1-2\alpha)\sigma_{m,q}}{2\sqrt{\alpha^2\sigma_q^2 + (1-\alpha)^2\sigma_m^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{m,q}}}$$

Caculando quando $\alpha = 0$, isto é, no ponto m:

$$\text{Inclinação} = \frac{\overline{R}_q - \overline{R}_m}{\frac{-\sigma_m^2 + \sigma_{m,q}}{\sigma_m}}$$

Os componentes da rentabiliade esperada de q:

$$\frac{\overline{R}_q - \overline{R}_m}{\frac{-\sigma_m^2 + \sigma_{m,q}}{\sigma_m}} = \frac{\overline{R}_m - R_f}{\sigma_m}$$

$$\overline{R}_q - \overline{R}_m = \left(\overline{R}_m - R_f\right) \frac{-\sigma_m^2 + \sigma_{m,q}}{\sigma_m^2} = \left(\overline{R}_m - R_f\right)\left(-1 + \frac{\sigma_{m,q}}{\sigma_m^2}\right)$$

$$\overline{R}_q = R_f + \frac{\sigma_{m,q}}{\sigma_m^2}\left(\overline{R}_m - R_f\right) \quad \boxed{\frac{\sigma_{m,q}}{\sigma_m^2}} \left(\overline{R}_m - R_f\right) \quad \boxed{\frac{\sigma_{m,q}}{\sigma_m^2}\left(\overline{R}_m - R_f\right)}$$

- $\frac{\sigma_{m,q}}{\sigma_m^2}$ é o Beta (β) do ativo q; trata-se de uma medida do risco sistêmico ou não diversificável do ativo;
- $\frac{\sigma_{m,q}}{\sigma_m^2}\left(\overline{R}_m - R_f\right)$ é o prêmio de risco desse ativo.