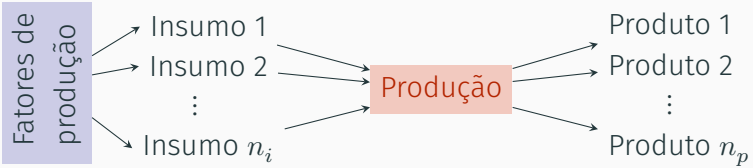
Produção

Roberto Guena de Oliveira

15 de maio de 2025

Representação gráfica



Descrição

Insumos são os itens que são incorporados ao produto e/ ou aos resíduos da produção;

Produtos são os itens que resultam do processo produtivo;

Produção é o processo de transformação de insumos em produtos;

Fatores de produção são as fontes de insumo empregados na produção.

Muitos autores, diferentemente do que fazemos aqui, usam fatores de produção e insumos como sinônimos.

Tipos de fatores de produção

Estoque de bens
Estoques de bens que serão empregados como insumos do processo produtivo (matérias primas, combustíveis).

Fundos de serviços
Objetos empregados mas não consumidos no processo produtivo. Dizemos que a produção consome os serviços desses objetos. Seu uso é medido em tempo e, em alguns casos intensidade. Exemplos: máquinas, instalações, equipamentos, terra agrícola, força de trabalho.

Terminologia

Empregaremos o termo bem para designar tanto bens físicos quanto serviços consumidos em processo de produção ou de consumo final. Desse modo, todo insumo do processo produtivo é um bem.

Um bem é perfeitamente identificado por suas características intrínsicas mais a localização e o momento de tempo no qual é disponibilizado.

Descrição da produção

Número de bens ℓ indexados por $\ell = 1, 2, \dots, \ell$;

Número de produtores n indexados por $j = 1, 2, \dots, n$;

Produção líquida $y_{j,h}$ = produção do bem h menos uso do bem h pelo produtor j.

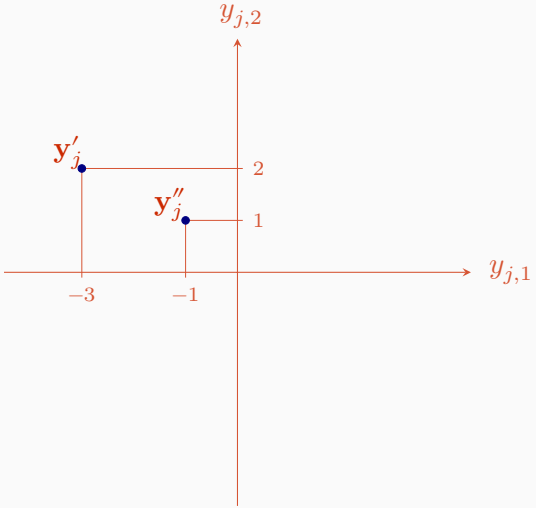
Plano de produção ou vetor de produção líquida

$$\mathbf{y}_j = (y_{j,1}, y_{j,2}, \cdots, y_{j,\ell})$$

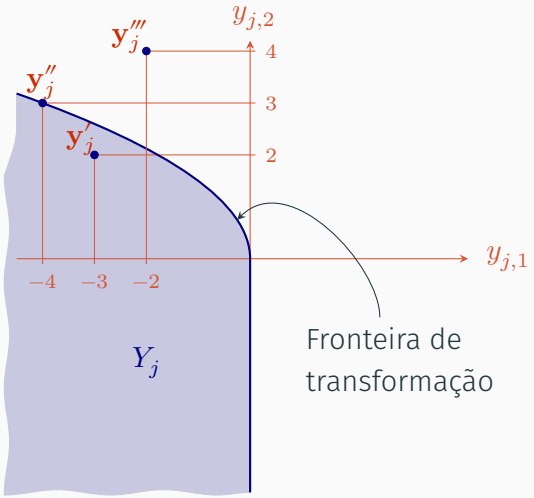
Conjunto de produção de um produtor j qualquer, notado por Y_j é o conjunto de planos de produção que são fisicamente factíveis para esse produtor, dada a tecnologia existente.

Exemplo com $\ell = 2$

Dois planos de produção

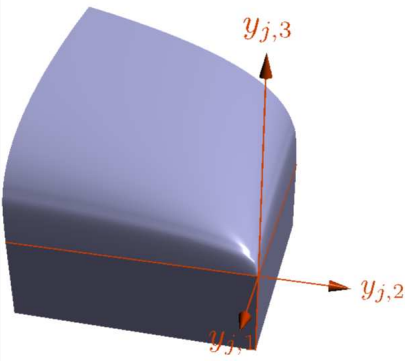


Um conjunto de produção

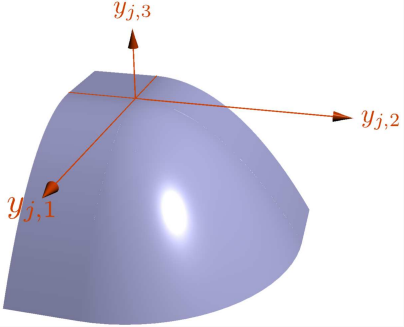


Exemplo, $\ell = 3$

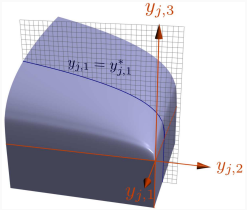
Dois insumos, um produto

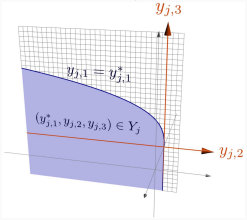


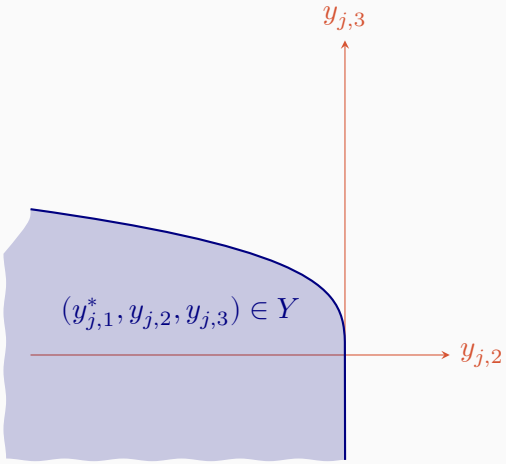
Dois produtos, um insumo



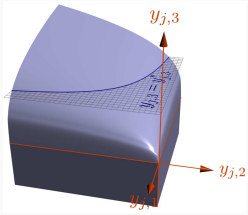
Corte paralelo ao plano $y_{2,j} \times y_{3,j}$ (1 produto 2 insumos)

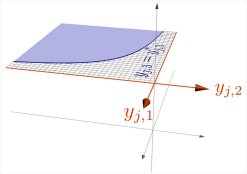


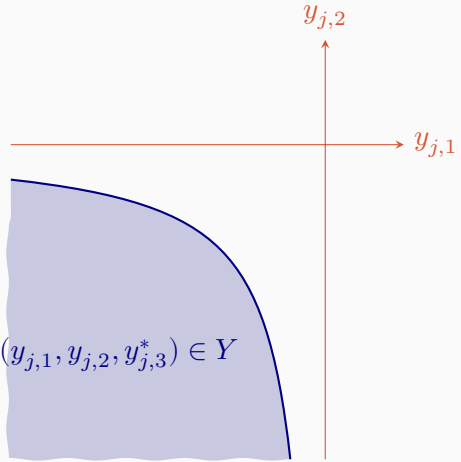




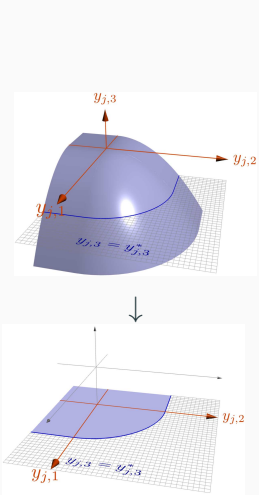
Corte paralelo ao plano $y_{1,j} \times y_{2,j}$ (1 produto 2 insumos)

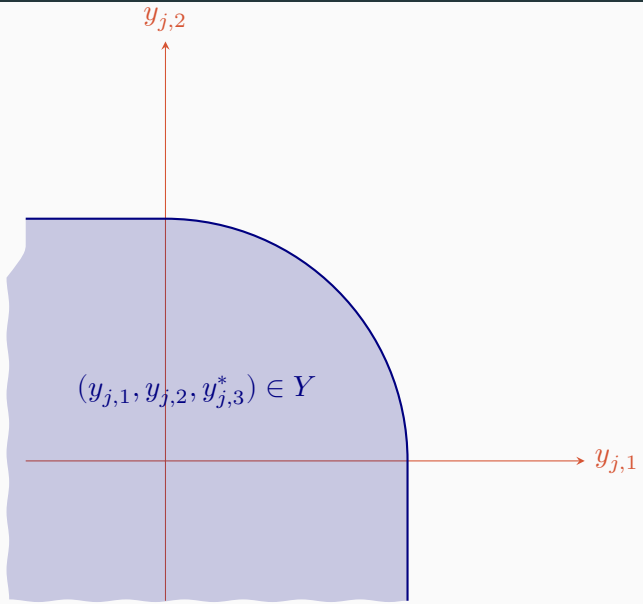






Corte paralelo ao plano $y_{2,j} \times y_{3,j}$ (2 produtos 1 insumo)





Função de transformação

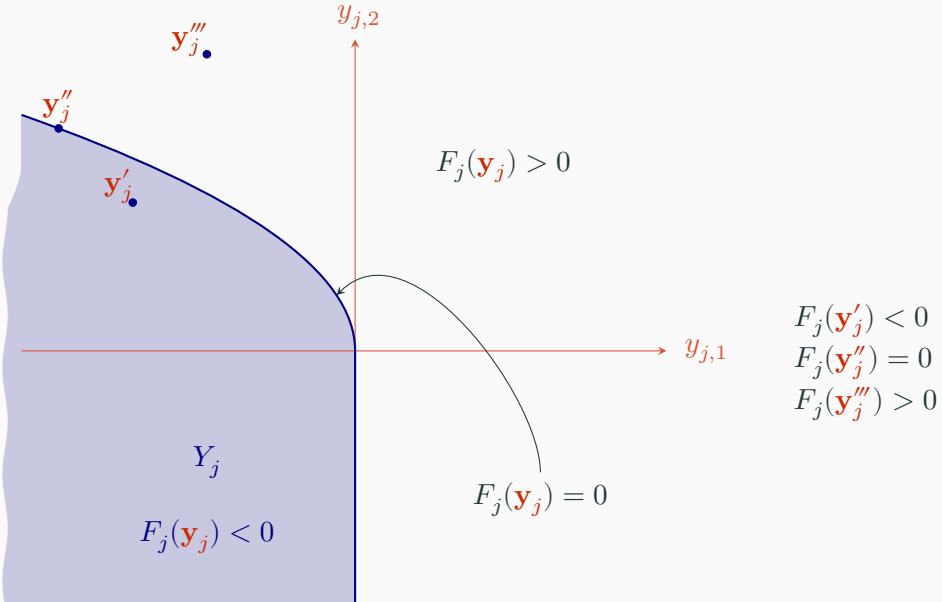
Uma função de transformação associada a um conjunto de produção $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$ é uma função contínua $F_j : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $y_j \in \mathbb{R}^\ell$

$F_j(\mathbf{y}_j) = 0$ se, e somente se, $\mathbf{y}_j$ pertence à fronteira de $Y[j]$,

$F_j(\mathbf{y}_j) < 0$ se, e somente se, $\mathbf{y}_j$ é ponto interior de Y_j e

$F_j(\mathbf{y}_j) > 0$ se, e somente se, $\mathbf{y}_j$ é ponto exterior a Y_j.

Função de transformação — ilustração, $\ell = 2$



$F_j(\mathbf{y}_j') < 0$
$F_j(\mathbf{y}_j'') = 0$
$F_j(\mathbf{y}_j''') > 0$

Exemplo: $\ell = 2$

O conjunto de produção da ilustração anterior é

$$Y_j = \left\{ y_{j,1}, y_{j,2} \mid y_{j,1} \leq 0 \text{ e } y_{j,1} \leq \frac{3}{4}\sqrt{-y_{j,1}} \right\}$$

Tal conjunto de produção admite a seguinte função de transformação

$$F_j(y_{j,1}, y_{j,2}) = \max\left\{ y_{j,1}, -\left({y_{j,2}}^2 + \frac{9}{4} y_{j,1} \right) \right\}$$

A taxa marginal de transformação

Em qualquer plano de produção sobre a fronteira de transformação, ou seja, para qualquer plano de produção $\mathbf{y}'_j$ tal que $F(\mathbf{y}'_j) = 0$, a taxa marginal de transformação entre os produtos $\tilde{h}$ e $\hat{h}$ é dada por

$$TMT_{j,\tilde{h},\hat{h}} = \frac{\partial F(\mathbf{y}'_j)/\partial \tilde{h}}{\partial F(\mathbf{y}'_j)/\partial \hat{h}}$$

A $TMT_{j,\tilde{h},\hat{h}}$ corresponde à inclinação da fronteira de transformação na fatia paralela ao plano $y_{j,\tilde{h}} \times y_{j,\hat{h}}$

Notação para comparação de vetores

Sejam $\mathbf{y}'_j, \mathbf{y}''_j \in \mathbb{R}^\ell$ então

$$\mathbf{y}'_j = \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots \ell\}, y'_{j,h} = y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \geq \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots \ell\}, y'_{j,h} \geq y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j > \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots \ell\}, y'_{j,h} \geq y''_{j,h} \text{ e } \exists h \in \{1, 2, \dots \ell\} \, | y'_{j,h} > y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \gg \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots \ell\}, y'_{j,h} > y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \leq \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots \ell\}, y'_{j,h} \leq y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j < \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots \ell\}, y'_{j,h} \leq y''_{j,h} \text{ e } \exists h \in \{1, 2, \dots \ell\} \, | y'_{j,h} < y''_{j,h}$$

$$\mathbf{y}'_j \ll \mathbf{y}''_j \Leftrightarrow \forall h \in \{1, 2, \dots \ell\}, y'_{j,h} < y''_{j,h}$$

Eficiência técnica

Um plano de produção $\mathbf{y}_j$ é dito tecnicamente eficiente em relação a um conjunto de produção Y_j caso

$$\mathbf{y}_j \in Y_j \text{ e } \nexists \mathbf{y}'_j \in Y_j \,|\, \mathbf{y}'_j > \mathbf{y}_j.$$

Todo plano de produçãrao eficiente encontra-se na fronteira do conjunto de produção. Porém, nem todo plano de produção na fronteira do conjunto de produção é eficiente.

Rendimentos de escala

Dizemos que Y_j apresenta

Rendimentos constantes de escala caso, para todo $\alpha > 0$, $\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \alpha \mathbf{y}_j \in Y_j$

Rendimentos crescentes de escala caso, para todo $\alpha > 1$,

$$\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \exists\, \mathbf{y}'_j \in Y_j \,|\, \alpha \mathbf{y}'_j > \alpha \mathbf{y}_j$$

Rendimentos decrescentes de escala caso, para todo $0 < \alpha < 1$,

$$\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \exists\, \mathbf{y}'_j \in Y_j \,|\, \alpha \mathbf{y}'_j > \alpha \mathbf{y}_j$$

Rendimentos não crescentes de escala caso, para todo $0 < \alpha < 1$,

$$\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \exists\, \mathbf{y}'_j \in Y_j \,|\, \alpha \mathbf{y}'_j \geq \alpha \mathbf{y}_j$$

Rendimentos não decrescentes de escala caso, para todo $0 < \alpha < 1$,

$$\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \exists\, \mathbf{y}'_j \in Y_j \,|\, \alpha \mathbf{y}'_j \geq \alpha \mathbf{y}_j$$

Hipóteses usuais

Y_j é fechado

Possibilidade de inatividade: $\mathbf{0} \in Y_j$.

No free lunch: $Y_j \cap \mathbb{R}^{\ell}_{+} \subset \{\mathbf{0}\}$

Livre descarte (*free disposal*): $\mathbf{y}_j \in Y_j$ e $\mathbf{y}'_j < \mathbf{y}_j \Rightarrow \mathbf{y}'_j \in Y_j$

Irreversibilidade: $Y_j \cap -Y_j \subset \{\mathbf{0}\}$

Replicabilidade: $\mathbf{y}_j \in Y_j, t \in \mathbb{N} \Rightarrow t\mathbf{y}_j \in Y_j$

Divisibilidade: $\mathbf{y}_j \in Y_j, 0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha\mathbf{y}_j \in Y_j$

Aditividade: $\mathbf{y}_j, \mathbf{y}'_j \in Y_j \Rightarrow \mathbf{y}_j + \mathbf{y}'_j \in Y_j$

Convexidade $\mathbf{y}_j, \mathbf{y}'_j \in Y_j, 0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha\mathbf{y}_j + (1-\alpha)\mathbf{y}'_j \in Y_j$

Neutralidade de escopo

Assuma as hipóteses de possibilidade de inatividade e de *no free lunch* e, para cada bem h, defina o conjunto

$$Y_j^h = \left\{ \mathbf{y}_j \in Y_j \,|\, y_{j,h} \geq 0, \tilde{h} \neq h \Rightarrow y_{j,\tilde{h}} \leq 0 \right\}$$

Diremos que Y_j apresenta neutralidade de escopo, caso, para qualquer $\mathbf{y}_j \in Y_j$, existam $\mathbf{y}_j^1 \in Y_j^1, \mathbf{y}_j^2 \in Y_j^2, \ldots \mathbf{y}_j^\ell \in Y_j^\ell$ tais que

$$\mathbf{y}_j^1 + \mathbf{y}_j^2 + \cdots + \mathbf{y}_j^\ell = \mathbf{y}_j$$

e, para quaisquer $\mathbf{y}_j^1 \in Y_j^1, \mathbf{y}_j^2 \in Y_j^2, \ldots \mathbf{y}_j^\ell \in Y_j^\ell$

$$\mathbf{y}_j^1 + \mathbf{y}_j^2 + \cdots + \mathbf{y}_j^\ell \in Y_j$$

Neutralidade de escopo — exemplo

Suponha $\ell = 3$ e a seguinte função de transformação

$$F(y_{j,1}, y_{j,2}, y_{j,2}) = y_{j,1} + \max\left\{0, y_{j,2}\right\}^2 + \max\left\{0, y_{j,3}\right\}^2$$

O conjunto de produção associado é

$$Y_j = \left\{ y_{j,1}, y_{j,2}, y_{j,3} \;\middle|\; y_{j,1} \leq -\max\left\{0, y_{j,2}\right\}^2 - \max\left\{0, y_{j,3}\right\}^2 \right\}$$

E os conjuntos com produção de apenas um bem são

$$Y_j^0 = \left\{ 0, y_{j,2}, y_{j,3} \;\middle|\; y_{j,2} \leq 0, y_{j,3} \leq 0 \right\}$$

$$Y_j^2 = \left\{ y_{j,1}, y_{j,2}, y_{j,3} \;\middle|\; y_{j,1} \leq -\max\left\{0, y_{j,2}\right\}^2, y_{j,3} \leq 0 \right\}$$

$$Y_j^3 = \left\{ y_{j,1}, y_{j,2}, y_{j,3} \;\middle|\; y_{j,1} \leq -\max\left\{0, y_{j,3}\right\}^2, y_{j,2} \leq 0 \right\}$$

Moste que esse conjunto de produção apresenta neutralidade de escopo

Neutralidade de escopo

Mostre que o conjunto de produção definido pela função de transformação

$$F_j(y_{j,1}, y_{j,2}, y_{j,3}) = -\min\left\{0, y_{j,1}\right\}^2 + \max\left\{0, y_{j,2}\right\}^2 + \max\left\{0, y_{j,3}\right\}^2$$

Não apresenta neutralidade de escopo.

Função de produção

Assuma que o conjunto de produção de um produtor j qualquer apresente neutraliade de escopo. Nesse, caso, podemos definir para cada bem h para o qual há possibilidade de produção líquida positiva a função $f_{i,h} : \mathbb{R}^{\ell} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_{j,h}(\mathbf{z}_{j,h}) = \max \left\{ q - z_{j,h,h} \mid -\mathbf{z}_{j,h} + \mathbf{a}_h \in Y_j^h \right\}$$

em que $\mathbf{a}_h$ é um vetor com todos os componentes nulos à exceção do h-ésimo componente que deve ser igual a q,

Exemplo

Se a função de transformação do produtor j é

$$F(y_{j,1}, y_{j,2}, y_{j,2}) = y_{j,1} + \max\left\{0, y_{j,2}\right\}^2 + \max\left\{0, y_{j,3}\right\}^2,$$

A função de produção de produção do bem 2 será

$$f_{j,2}(z_{j,2,1}, z_{j,2,2}, z_{j,2,3}) = \sqrt{z_{j,2,1}}$$

E a função de produção do bem 3 será

$$f_{j,3}(z_{j,3,1}, z_{j,3,2}, z_{j,3,3}) = \sqrt{z_{j,3,1}}$$

Simplificações

No que se segue, eliminaremos os subescritos da função de produção e do vetor de insumos.

Função de produção e hipóteses sobre produção

Inatividade: $\mathbf{0}$ pertence ao domínio de f e $\mathbf{0} \geq 0$;

No free lunch: $f(\mathbf{0}) \leq 0$;

Livre descarte: $\mathbf{z}' \geq \mathbf{z}'' \Rightarrow f(\mathbf{z}') \geq f(\mathbf{z}'')$;

Replicabilidade: $\forall t \in \mathbb{N}, f(t\mathbf{z}) \geq tf(\mathbf{z})$;

Divisibilidade : $0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow f(\alpha\mathbf{z}) \geq \alpha f(\mathbf{z})$

Aditividade: $f(\mathbf{z}' + \mathbf{z}'') \geq f(\mathbf{z}') + f(\mathbf{z}'')$;

Rendimentos não crescentes de escala: $\forall \alpha > 0, [f(\alpha\mathbf{z}) - \alpha f(\mathbf{z})]/(1-\alpha) \geq 0$

Rendimentos não decrescentes de escala: $\forall \alpha > 0, [f(\alpha\mathbf{z}) - \alpha f(\mathbf{z})]/(1-\alpha) \leq 0$

Convexidade da conjunto de produção: A função de produção é côncava:

$$\forall\ 0 \leq \alpha \leq 1, f[\alpha\mathbf{z}' + (1-\alpha)\mathbf{z}''] \geq \alpha f(\mathbf{z}') + (1-\alpha) f(\mathbf{z}'')$$

Medidas de produtividade

Produtividade média

$$PMe_h = \frac{f(\mathbf{z})}{z_h}$$

Sinônimos: produto médio, rendimento médio.

Produtividade marginal

$$PMg_h = \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h}$$

Sinônimos: produto marginal, rendimento marginal.

Exemplo: função Cobb-Douglas

$$f(\mathbf{z}) = A \prod_{h=1}^{\ell} {z_h}^{\alpha_h} \ , \quad \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \geq 0$$

$$PMe_{\tilde{h}} = \frac{A}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} {z_h}^{\alpha_h}$$

$$PMg_{\tilde{h}} = A \frac{\alpha_{\tilde{h}}}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} {z_h}^{\alpha_h}$$

Exemplo: função CES

$$f(\mathbf{z}) = A\left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h {z_h}^{\rho}\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}, \quad a_1, \ldots, a_\ell > 0, \sum_{h=1}^{\ell} a_h = 1, \gamma > 0.$$

$$PMe_{\tilde{h}} = \frac{A}{z_{\tilde{h}}}\left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h {z_h}^{\rho}\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$$

$$PMg_{\tilde{h}} = \gamma a_{\tilde{h}} {z_{\tilde{h}}}^{\rho-1}\left[A\sum_{h=1}^{\ell} a_h {z_h}^{\rho}\right]^{\frac{\gamma-\rho}{\rho}}$$

Produtividades média e marginal — interpretação gráfica

Elasticidade de escala

$$\eta = \frac{df(\alpha \mathbf{z})}{d\alpha} \frac{\alpha}{f(\alpha \mathbf{z})} \Bigg|_{\alpha=1}$$

$$\eta = \sum_{h=1}^{\ell} \frac{z_h}{f(\mathbf{z})} \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h} = \sum_{h=1}^{\ell} \frac{PMg_h}{PMe_h}$$

Elasticidade de escala e rendimentos de escala

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{f(\alpha \mathbf{z}) - \alpha f(\mathbf{z})}{(1-\alpha)} = \lim_{\alpha \to 1} \left[f(\mathbf{z}) - \sum_{h=1}^{h} z_h \frac{\partial f(\alpha \mathbf{z})}{\partial z_h} \right] = f(\mathbf{z}) - \sum_{h=1}^{h} z_h \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h}$$

$$= f(\mathbf{z}) \left[1 - \sum_{h=1}^{h} \frac{z_h}{f(\mathbf{z})} \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h} \right] = f(\mathbf{z}) \left[1 - \eta \right]$$

Logo a função de produção apresenta localmente rendimentos crescentes de escala caso $\eta > 1$, rendimentos constantes de escala caso $\eta = 1$ e rendimentos decrescentes de escala caso $\eta < 1$.

Exemplo: função Cobb-Douglas

$$f(\mathbf{z}) = A \prod_{h=1}^{\ell} {z_h}^{\alpha_h} \ , \quad \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \geq 0$$

$$PMe_{\tilde{h}} = \frac{A}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} {z_h}^{\alpha_h}$$

$$PMg_{\tilde{h}} = A \frac{\alpha_{\tilde{h}}}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} {z_h}^{\alpha_h}$$

$$\eta = \sum_{\tilde{h}=1}^{\ell} \frac{A \frac{\alpha_{\tilde{h}}}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} {z_h}^{\alpha_h}}{\frac{A}{z_{\tilde{h}}} \prod_{h=1}^{\ell} {z_h}^{\alpha_h}} = \sum_{h=1}^{\ell} \alpha_{\tilde{h}}$$

Exemplo: função CES

$$f(\mathbf{z}) = A\left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h {z_h}^{\rho}\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}, \quad a_1, \dots, a_\ell > 0, \sum_{h=1}^{\ell} a_h = 1, \gamma > 0.$$

$$PMe_{\tilde{h}} = \frac{A}{z_{\tilde{h}}}\left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h {z_h}^{\rho}\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$$

$$PMg_{\tilde{h}} = A\gamma a_{\tilde{h}} {z_{\tilde{h}}}^{\rho-1}\left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h {z_h}^{\rho}\right]^{\frac{\gamma-\rho}{\rho}}$$

$$\eta = \sum_{\tilde{h}=1}^{\ell} \frac{A\gamma a_{\tilde{h}} {z_{\tilde{h}}}^{\rho-1}\left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h {z_h}^{\rho}\right]^{\frac{\gamma-\rho}{\rho}}}{\frac{A}{z_{\tilde{h}}}\left[\sum_{h=1}^{\ell} a_h {z_h}^{\rho}\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}} = \gamma \frac{\sum_{\tilde{h}=1}^{\ell} a_{\tilde{h}} {z_{\tilde{h}}}^{\rho}}{\sum_{h=1}^{\ell} a_h {z_h}^{\rho}} = \gamma$$

Exemplo

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{h=1}^{\ell} \ln(\mathbf{z}_h + 1)$$

$$PMe_{\tilde{h}} = \frac{\sum_{h=1}^{\ell} \ln(\mathbf{z}_h + 1)}{z_{\tilde{h}}}$$

$$PMg_{\tilde{h}} = \frac{1}{z_{\tilde{h}} + 1}$$

$$\eta = \frac{\sum_{h=1}^{\ell} \frac{z_h}{z_h + 1}}{\sum_{h=1}^{\ell} \ln(z_h + 1)}$$