

Maximização de Lucro

Roberto Guena

15 de maio de 2025

Firmas

Assumiremos que os produtores sejam firmas. Cada firma possui um ou mais proprietários ou sócios. Assuma que cada firma considera os preços da economia, $\mathbf{p} = p_1, p_2, \dots, p_\ell$, como parâmetros dados que ela não consegue alterar.

Firmas

Assumiremos que os produtores sejam firmas. Cada firma possui um ou mais proprietários ou sócios. Assuma que cada firma considera os preços da economia, $\mathbf{p} = p_1, p_2, \dots, p_\ell$, como parâmetros dados que ela não consegue alterar.

Se a firma j escolhe o vetor de produção líquida $\mathbf{y}_j$, seu lucro será

$$\pi_j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j = p_1 y_{j,1} + p_2 y_{j,2} + \dots + p_\ell y_{j,\ell}$$

Firmas

Assumiremos que os produtores sejam firmas. Cada firma possui um ou mais proprietários ou sócios. Assuma que cada firma considera os preços da economia, $\mathbf{p} = p_1, p_2, \dots, p_\ell$, como parâmetros dados que ela não consegue alterar.

Se a firma j escolhe o vetor de produção líquida $\mathbf{y}_j$, seu lucro será

$$\pi_j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j = p_1 y_{j,1} + p_2 y_{j,2} + \dots + p_\ell y_{j,\ell}$$

A cada consumidor i , é atribuída uma participação $s_{i,j} \geq 0$ no lucro da firma j , sendo $\sum_{i=1}^m s_{i,j} = 1$ (se o consumidor i não é sócio da firma j , $s_{i,j} = 0$). Desse modo, a restrição orçamentária de um sócio da firma j será dada por

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i = m_i + s_{i,j} \pi_j.$$

Na qual m_i é a renda desse consumidor proveniente de outras fontes que não sua participação no lucro da firma. Evidentemente, é do interesse de cada sócio que o lucro da firma seja o maior possível.

O problema de maximização de lucro

Escolher $\mathbf{y}_j$ de modo a maximizar

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j$$

dada a restrição

$$F_j(\mathbf{y}_j) \leq 0.$$

O problema de maximização de lucro

Escolher $\mathbf{y}_j$ de modo a maximizar

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j$$

dada a restrição

$$F_j(\mathbf{y}_j) \leq 0.$$

A função de Lagrange associada a esse problema é

$$\mathcal{L} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j - \lambda F_j(\mathbf{y}_j).$$

O problema de maximização de lucro

Escolher $\mathbf{y}_j$ de modo a maximizar

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j$$

dada a restrição

$$F_j(\mathbf{y}_j) \leq 0.$$

A função de Lagrange associada a esse problema é

$$\mathcal{L} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j - \lambda F_j(\mathbf{y}_j).$$

A solução ótima, deve atender às condições de primeira ordem

$$F_j(\mathbf{y}_j) = 0$$

e

$$p_h - \lambda \frac{\partial F_j(\mathbf{y}_j)}{\partial y_{j,h}} = 0, \quad h = 1, \dots, \ell$$

Interpretação das condições de primeira ordem

$$\left. \begin{aligned} p_{\tilde{h}} - \lambda^* \frac{\partial F_j(\mathbf{y}_j^*)}{\partial y_{j,\tilde{h}}} &= 0 \Rightarrow p_{\tilde{h}} = \lambda^* \frac{\partial F_j(\mathbf{y}_j^*)}{\partial y_{j,\tilde{h}}} \\ p_{\hat{h}} - \lambda^* \frac{\partial F_j(\mathbf{y}_j^*)}{\partial y_{j,\hat{h}}} &= 0 \Rightarrow p_{\hat{h}} = \lambda^* \frac{\partial F_j(\mathbf{y}_j^*)}{\partial y_{j,\hat{h}}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{p_{\tilde{h}}}{p_{\hat{h}}} = \frac{\frac{\partial F_j(\mathbf{y}_j^*)}{\partial y_{j,\tilde{h}}}}{\frac{\partial F_j(\mathbf{y}_j^*)}{\partial y_{j,\hat{h}}}} = TMT_{\tilde{h},\hat{h}}$$

A produção de lucro máximo é um ponto sobre a fronteira de transformação no qual, caso a TMT entre dois bens seja definida, a razão entre os preços desses dois bens é igual à taxa marginal de transformação entre esses dois bens.

Funções de oferta líquida e de lucro

Seja $\mathbf{y}_j(\mathbf{p})$ a função que retorna o vetor de produção líquida que maximiza o lucro da firma j . Chamamos essa função de **função de oferta líquida** da firma j , e o h -ésimo componente do resultado dessa função, $y_{j,h}^*(\mathbf{p})$, de função de oferta líquida do bem h , $h = 1, \dots, \ell$.

A função que retorna o lucro máximo da firma j , dada por

$$\pi^*(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j^*(\mathbf{p}),$$

é chamada **função de lucro** da firma j .

Máximização de lucro com produto único

Se há apenas um produto, o problema de maximização de lucro pode ser expresso como maximizar

$$p_j q_j - \sum_{h=1}^{\ell} w_h z_{j,h},$$

dadas as restrições

$$q_j \leq f_j(\mathbf{z}_j),$$

e

$$\mathbf{z}_j \geq \mathbf{0},$$

no qual q_j é a quantidade líquida de produto da firma j , f_j é a função de produção dessa firma, p_j é o preço de seu único produto, w_h é o preço do bem h , $z_{j,h}$ é a quantidade líquida do bem h empregada como insumo na produção e $\mathbf{z}_j$ é o vetor dessas quantidades.

Máximização de lucro com produto único (continuação)

Se os preços do produto e dos insumos são positivos, a firma deve atender à restrição $q_j \leq f_j(\mathbf{z}_j)$ com igualdade. Podemos, então substituir essa restrição na função objetivo, transformando o problema em escolher $z_{j,1}, \dots, z_{j,\ell}$ de modo a maximizar

$$p_j f(z_{j,1}, \dots, z_{j,\ell}) - \sum_{h=1}^{\ell} w_h z_{j,h},$$

obedecendo a restrição

$$\mathbf{z}_j \geq \mathbf{0}.$$

As condições de primeira ordem são

$$p_j \frac{\partial f(\mathbf{z}_j^*)}{\partial z_{j,h}} = w_h \quad \text{caso } z_{j,h}^* > 0 \quad \text{e} \quad p_j \frac{\partial f(\mathbf{z}_j^*)}{\partial z_{j,h}} \leq w_h \quad \text{caso } z_{j,h}^* = 0.$$

Exemplos

Encontre a função de oferta líquida e a função de lucro para a função de transformação abaixo:

$$F(y_1, y_2, y_3) = \max\{0, y_1\}^2 + \max\{0, y_2\}^2 + y_3$$

Máximização de lucro com produto único: interpretação

$p_j \frac{\partial f(\mathbf{z}_j^*)}{\partial z_{j,h}} = w_h$ é condição de igualdade entre o valor do produto marginal do insumo, $p_j \frac{\partial f(\mathbf{z}_j^*)}{\partial z_{j,h}}$, e seu preço, w_h .

Máximização de lucro com produto único: interpretação

$p_j \frac{\partial f(\mathbf{z}_j^*)}{\partial z_{j,h}} = w_h$ é condição de igualdade entre o valor do produto marginal do insumo, $p_j \frac{\partial f(\mathbf{z}_j^*)}{\partial z_{j,h}}$, e seu preço, w_h .

Dividindo dos dois lados por p_j , obtemos $\frac{\partial f(\mathbf{z}_j^*)}{\partial z_{j,h}} = \frac{w_h}{p_j}$, que é a condição de igualdade entre a produtividade marginal do insumo e seu preço expresso em termos de unidades do produto (preço real).

Máximização de lucro com produto único: interpretação

$p_j \frac{\partial f(\mathbf{z}_j^*)}{\partial z_{j,h}} = w_h$ é condição de igualdade entre o valor do produto marginal do insumo, $\frac{\partial f(\mathbf{z}_j^*)}{\partial z_{j,h}}$, e seu preço, w_h .

Dividindo dos dois lados por p_j , obtemos $\frac{\partial f(\mathbf{z}_j^*)}{\partial z_{j,h}} = \frac{w_h}{p_j}$, que é a condição de igualdade entre a produtividade marginal do insumo e seu preço expresso em termos de unidades do produto (preço real).

A firma só irá contratar uma quantidade nula de um insumo caso, quando seu emprego é zero, sua produtividade marginal seja menor ou igual ao seu preço real.

Funções de demanda de insumos, de oferta e de lucro

As funções $z_{j,1}^*(p, \mathbf{w}), \dots, z_{j,\ell}^*(p, \mathbf{w})$ que retornam as soluções do problema de maximização de lucro função dos preços p e $\mathbf{w}$ são chamadas **funções de demanda** de insumos da firma j .

Funções de demanda de insumos, de oferta e de lucro

As funções $z_{j,1}^*(p, \mathbf{w}), \dots, z_{j,\ell}^*(p, \mathbf{w})$ que retornam as soluções do problema de maximização de lucro função dos preços p e $\mathbf{w}$ são chamadas **funções de demanda** de insumos da firma j .

A função

$$q_j(p, \mathbf{w}) = f_j(z_{j,1}^*(p, \mathbf{w}), \dots, z_{j,\ell}^*(p, \mathbf{w}))$$

é chamada **função de oferta** da firma j .

Funções de demanda de insumos, de oferta e de lucro

As funções $z_{j,1}^*(p, \mathbf{w}), \dots, z_{j,\ell}^*(p, \mathbf{w})$ que retornam as soluções do problema de maximização de lucro função dos preços p e $\mathbf{w}$ são chamadas **funções de demanda** de insumos da firma j .

A função

$$q_j(p, \mathbf{w}) = f_j(z_{j,1}^*(p, \mathbf{w}), \dots, z_{j,\ell}^*(p, \mathbf{w}))$$

é chamada **função de oferta** da firma j .

A função de lucro da firma j também pode ser calculada como

$$\pi(p_j, \mathbf{w}) = p_j f_j(p_j, \mathbf{w}) - \mathbf{w} \mathbf{z}_j(p_j, \mathbf{w}).$$

Exemplos

$$f(z_1, z_2) = z_1^{\frac{1}{4}} z_2^{\frac{1}{4}}$$

$$f(z_1, z_2) = \sqrt{z_1 z_2}$$

Isolucro

Chamamos **conjunto de isolucro** associado a um vetor de preços $\mathbf{p}$ e um plano de produção qualquer $\mathbf{y}_j^*$, o conjunto dos planos de produção que geram, aos preços $\mathbf{p}$, o mesmo lucro que o plano de produção $\mathbf{y}_j^*$, ou seja o conjunto

$$\{\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^\ell \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j^*\}.$$

Isolucro

Chamamos **conjunto de isolucro** associado a um vetor de preços $\mathbf{p}$ e um plano de produção qualquer $\mathbf{y}_j^*$, o conjunto dos planos de produção que geram, aos preços $\mathbf{p}$, o mesmo lucro que o plano de produção $\mathbf{y}_j^*$, ou seja o conjunto

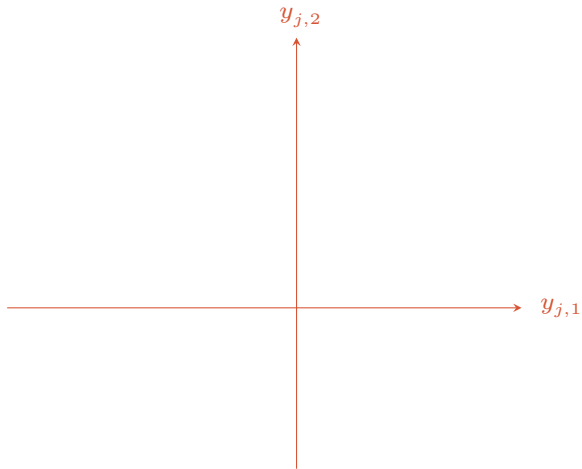
$$\{\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^\ell \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j^*\}.$$

Se $\mathbf{y}_j$ pertence ao conjunto de isolucro associado a $\mathbf{y}_j^*$ e ao vetor de preços $\mathbf{p}$, então

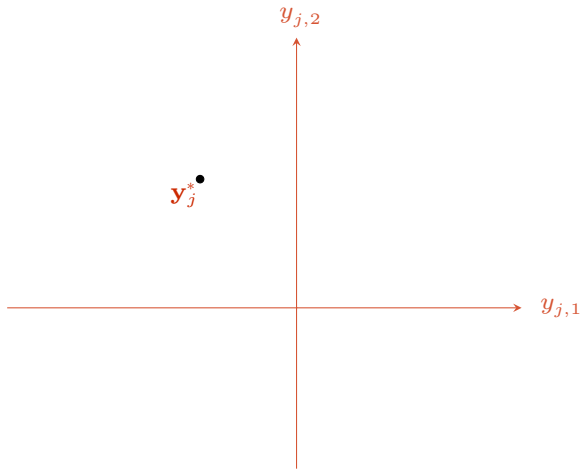
$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j^* \Rightarrow \mathbf{p} \cdot (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_j^*) = 0$$

Para que isso ocorra, os vetores $\mathbf{p}$ e $\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_j^*$ precisam ser ortogonais (formar um ângulo reto).

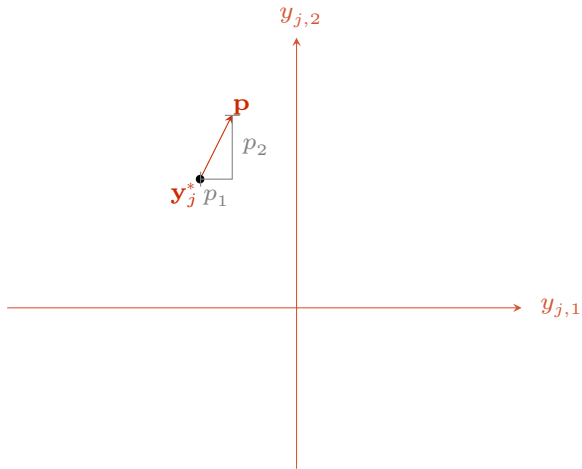
Linha de isolucro ($\ell = 2$)



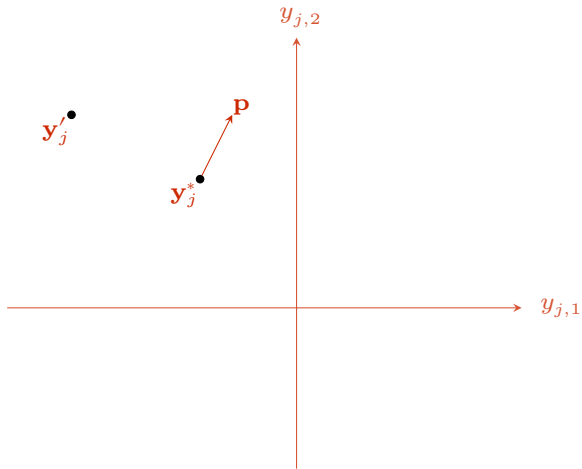
Linha de isolucro ($\ell = 2$)



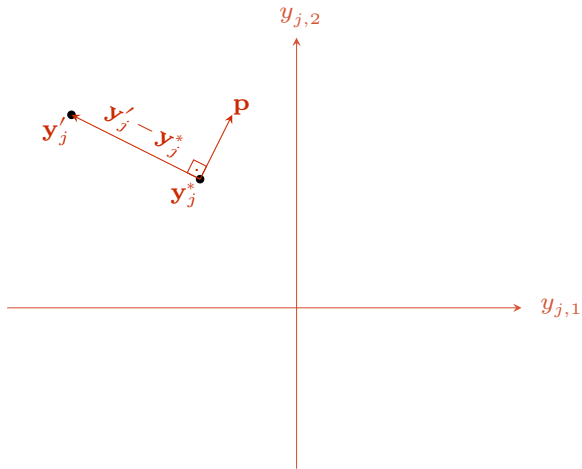
Linha de isolucro ($\ell = 2$)



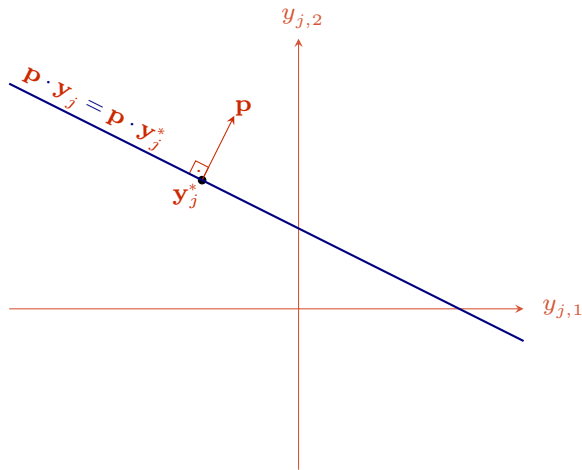
Linha de isolucro ($\ell = 2$)



Linha de isolucro ($\ell = 2$)

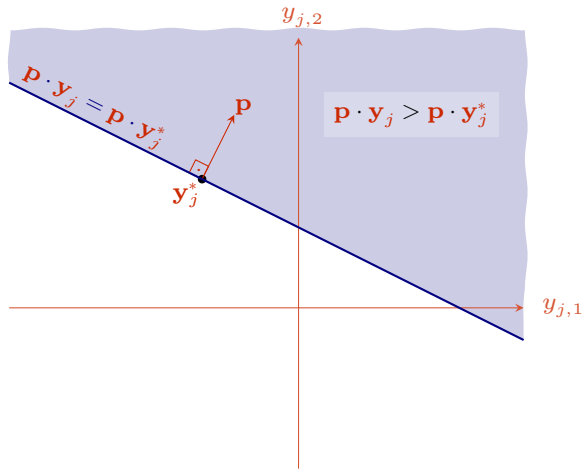


Linha de isolucro ($\ell = 2$)



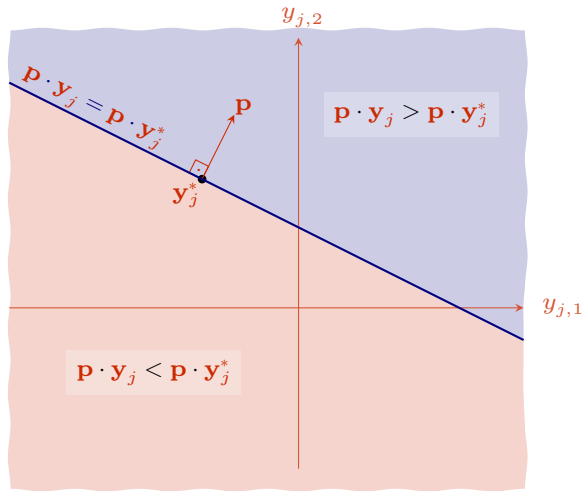
No caso em que há apenas dois bens, o conjunto de isolucro associado ao plano de produção $\mathbf{y}_j^*$ corresponde, no plano $y_{j,1} \times y_{j,2}$, à linha reta que passa pelo ponto $\mathbf{y}_j^*$ e forma ângulo reto com o vetor de preços $\mathbf{p}$.

Linha de isolucro ($\ell = 2$)



No caso em que há apenas dois bens, o conjunto de isolucro associado ao plano de produção y_j^* corresponde, no plano $y_{j,1} \times y_{j,2}$, à linha reta que passa pelo ponto y_j^* e forma ângulo reto com o vetor de preços p .

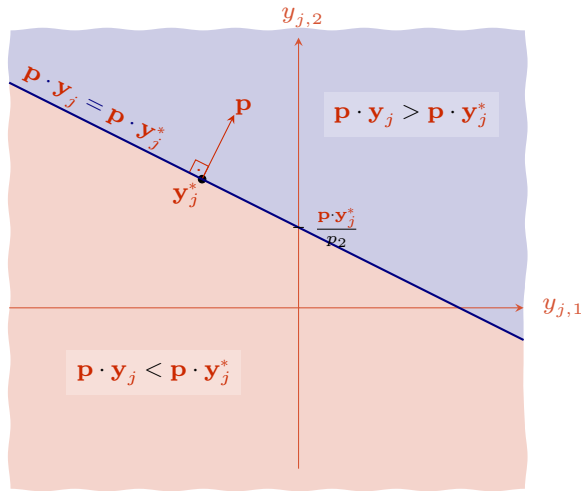
Linha de isolucro ($\ell = 2$)



No caso em que há apenas dois bens, o conjunto de isolucro associado ao plano de produção $\mathbf{y}_j^*$ corresponde, no plano $y_{j,1} \times y_{j,2}$, à linha reta que passa pelo ponto $\mathbf{y}_j^*$ e forma ângulo reto com o vetor de preços $\mathbf{p}$.

Essa linha divide o plano $y_{j,1} \times y_{j,2}$ em dois semiplanos. No lado dessa linha para o qual o vetor de preços aponta estão planos de produção com lucro superior ao do plano $\mathbf{y}_j^*$. No lado oposto encontram-se planos de produção que geram lucro menor ao gerado por $\mathbf{y}_j^*$.

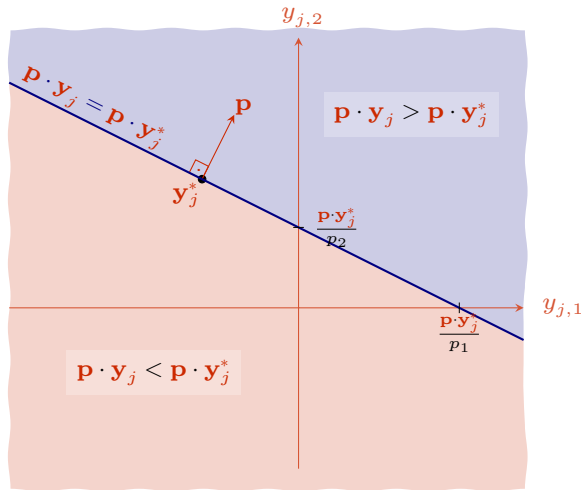
Linha de isolucro ($\ell = 2$)



No caso em que há apenas dois bens, o conjunto de isolucro associado ao plano de produção $\mathbf{y}_j^*$ corresponde, no plano $y_{j,1} \times y_{j,2}$, à linha reta que passa pelo ponto $\mathbf{y}_j^*$ e forma ângulo reto com o vetor de preços $\mathbf{p}$.

Essa linha divide o plano $y_{j,1} \times y_{j,2}$ em dois semiplanos. No lado dessa linha para o qual o vetor de preços aponta estão planos de produção com lucro superior ao do plano $\mathbf{y}_j^*$. No lado oposto encontram-se planos de produção que geram lucro menor ao gerado por $\mathbf{y}_j^*$.

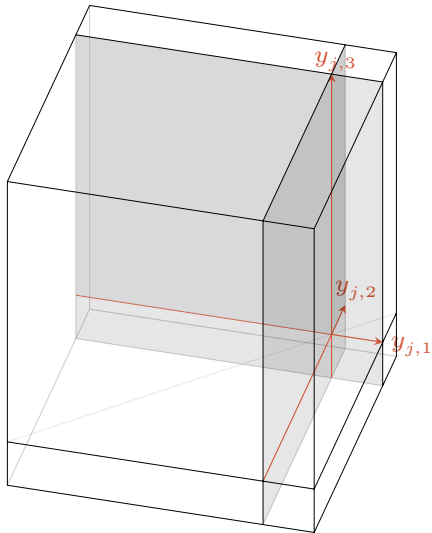
Linha de isolucro ($\ell = 2$)



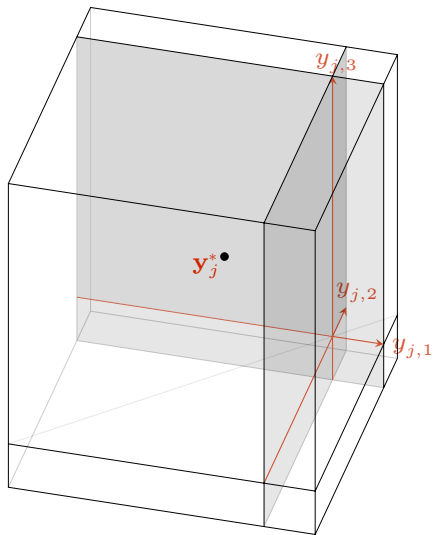
No caso em que há apenas dois bens, o conjunto de isolucro associado ao plano de produção $\mathbf{y}_j^*$ corresponde, no plano $y_{j,1} \times y_{j,2}$, à linha reta que passa pelo ponto $\mathbf{y}_j^*$ e forma ângulo reto com o vetor de preços $\mathbf{p}$.

Essa linha divide o plano $y_{j,1} \times y_{j,2}$ em dois semiplanos. No lado dessa linha para o qual o vetor de preços aponta estão planos de produção com lucro superior ao do plano $\mathbf{y}_j^*$. No lado oposto encontram-se planos de produção que geram lucro menor ao gerado por $\mathbf{y}_j^*$.

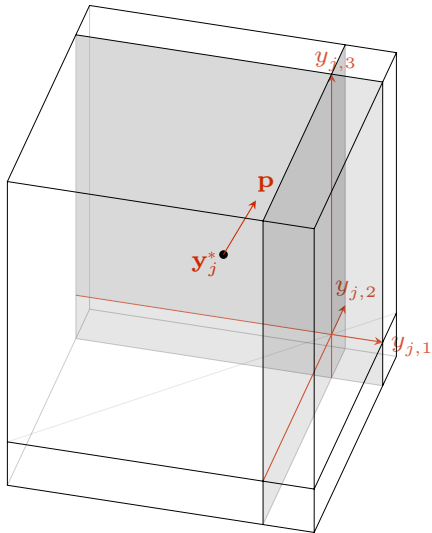
Isolucro ($\ell = 3$)



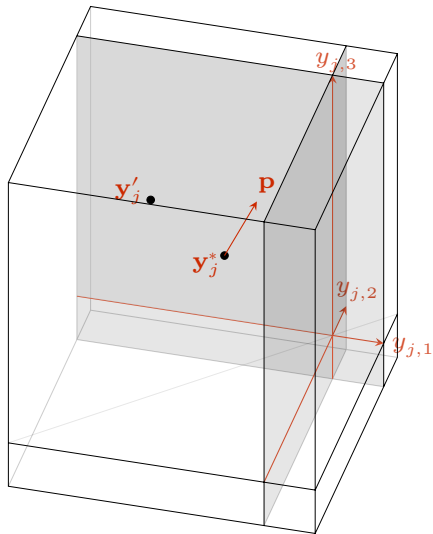
Isolucro ($\ell = 3$)



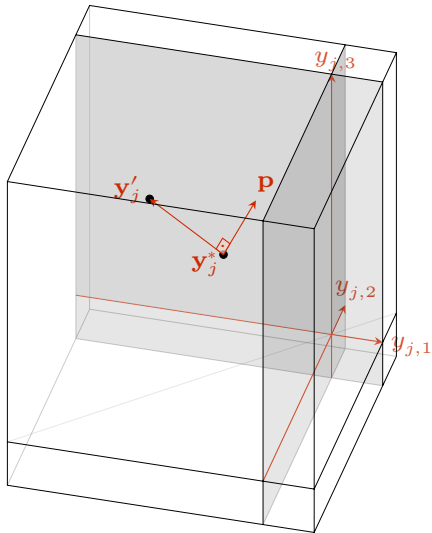
Isolucro ($\ell = 3$)



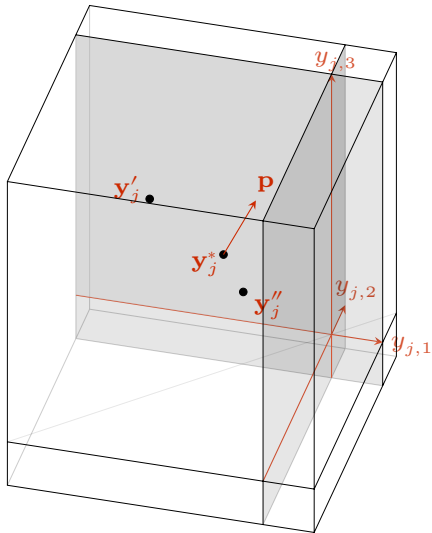
Isolucro ($\ell = 3$)



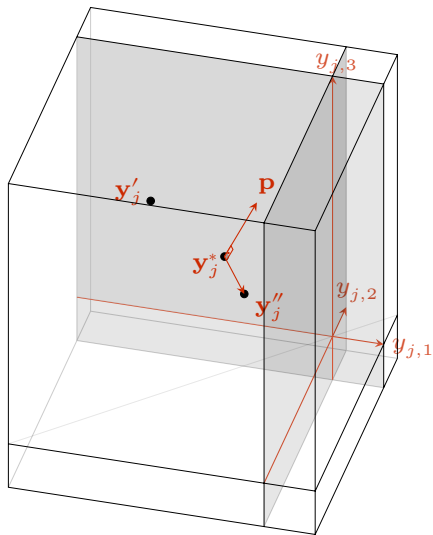
Isolucro ($\ell = 3$)



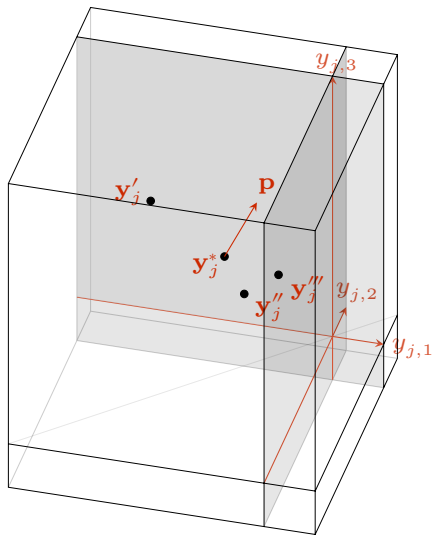
Isolucro ($\ell = 3$)



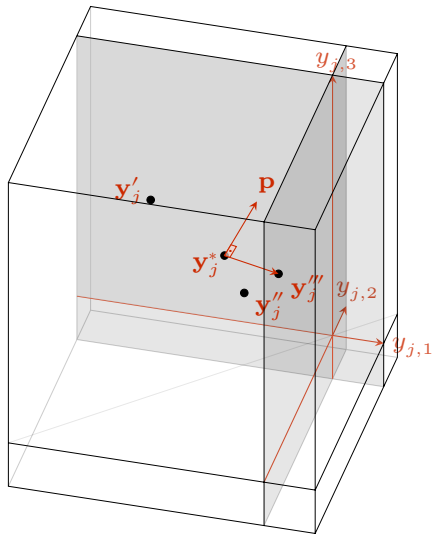
Isolucro ($\ell = 3$)



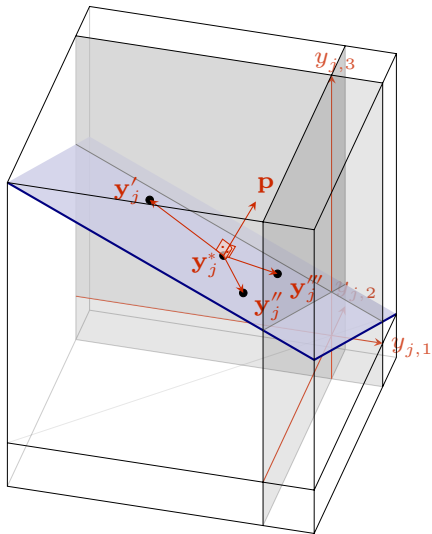
Isolucro ($\ell = 3$)



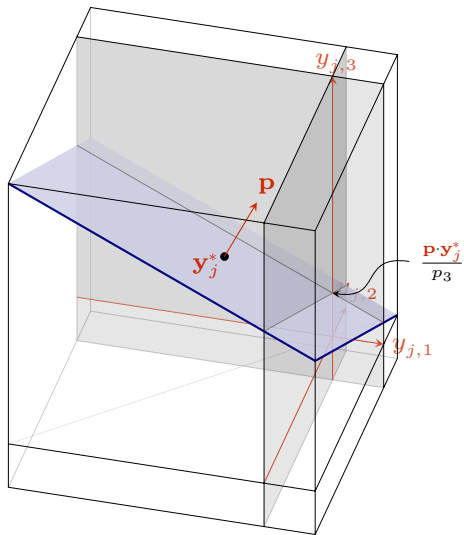
Isolucro ($\ell = 3$)



Isolucro ($\ell = 3$)



Isolucro ($\ell = 3$)



No caso de três bens, o conjunto de isolucro associado a $\mathbf{y}_j^*$ é representado graficamente pelo plano que contém $\mathbf{y}_j^*$ e é ortogonal ao vetor de preços. Tal plano divide o espaço em dois semiespaços. O semiespaço aberto na direção para a qual o vetor de preços aponta contém planos de produção que, aos preços considerados, geram lucro maior do que $\mathbf{y}_j^*$. Os planos de produção no semiespaço complementar contém planos de produção que geram lucro menor ou igual a $\mathbf{y}_j^*$.

Isolucro — o caso geral

Generalizando nossa interpretação geométrica, se $\mathbf{y}^*, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^\ell$, e $\mathbf{p} > 0$, dizemos que o conjunto

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^*\}$$

é um **hiperplano** de $\mathbb{R}^\ell$ e que ele divide esse espaço ($\mathbb{R}^\ell$) em dois semiespaços, o primeiro deles, na direção apontada pelo vetor $\mathbf{p}$,

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^*\}$$

e, o segundo, na direção oposta,

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^*\}.$$

Condição de lucro máximo e isolucro

Se $\mathbf{y}_j^*$ é o plano de produção que maximiza o lucro da firma j aos preços $\mathbf{p}$, então,

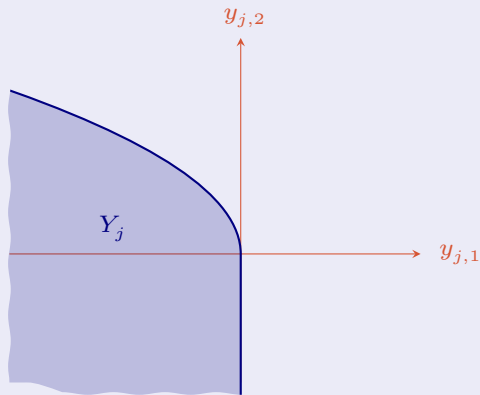
$$\mathbf{y}_j \in Y_j \Rightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j^*.$$

Em outras palavras, a solução de lucro máximo, $\mathbf{y}_j^*(\mathbf{p})$ é caracterizada por

$$\mathbf{y}_j^*(\mathbf{p}) \in Y_j \quad \text{e} \quad Y_j \subset \{ \mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^\ell \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j^*(\mathbf{p}) \}.$$

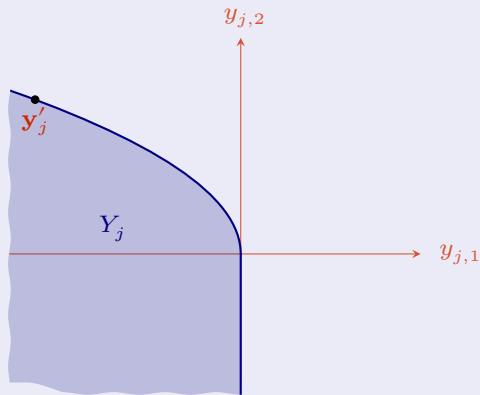
Interpretação gráfica: o caso de dois bens

Usando o conjunto de produção



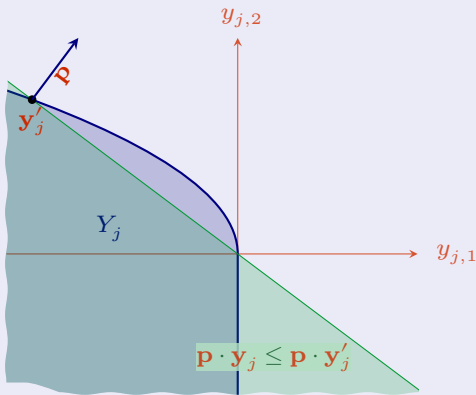
Interpretação gráfica: o caso de dois bens

Usando o conjunto de produção



Interpretação gráfica: o caso de dois bens

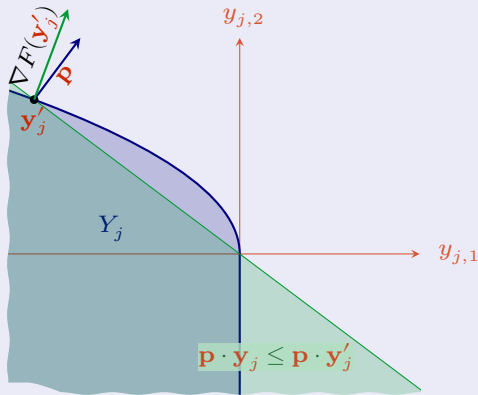
Usando o conjunto de produção



O conjunto de produção possui pontos nos dois semiplanos definidos pela linha de isolucro associada ao vetor de preços p que passa por y'_j . Logo, y'_j não é o plano de produção de lucro máximo a esse vetor de preços.

Interpretação gráfica: o caso de dois bens

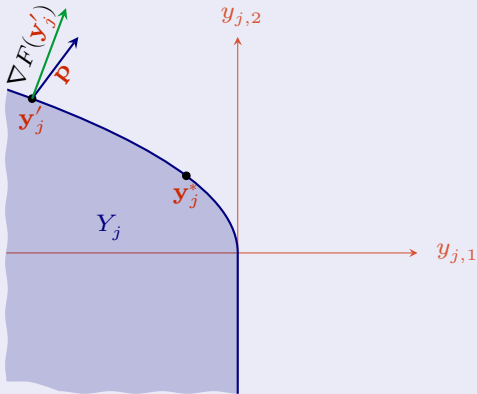
Usando o conjunto de produção



O conjunto de produção possui pontos nos dois semiplanos definidos pela linha de isolucro associada ao vetor de preços p que passa por y'_j . Logo, y'_j não é o plano de produção de lucro máximo a esse vetor de preços.

Interpretação gráfica: o caso de dois bens

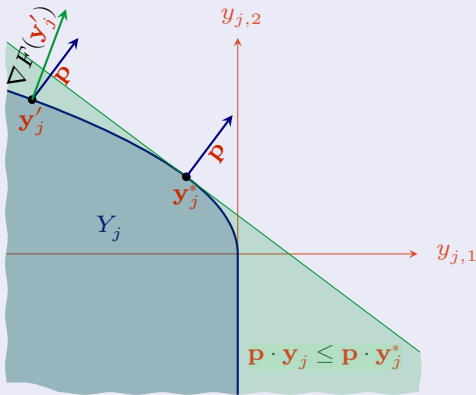
Usando o conjunto de produção



O conjunto de produção possui pontos nos dois semiplanos definidos pela linha de isolucro associada ao vetor de preços p que passa por y'_j . Logo, y'_j não é o plano de produção de lucro máximo a esse vetor de preços.

Interpretação gráfica: o caso de dois bens

Usando o conjunto de produção



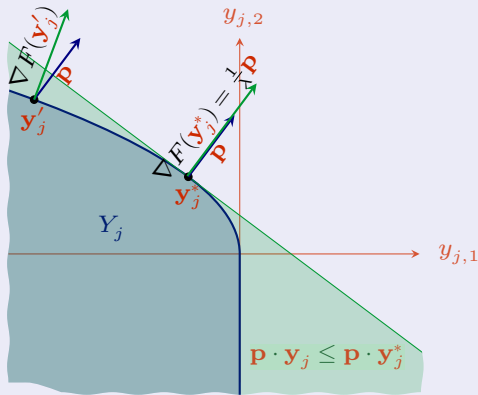
O conjunto de produção possui pontos nos dois semiplanos definidos pela linha de isolucro associada ao vetor de preços $\mathbf{p}$ que passa por $\mathbf{y}_j'$. Logo, $\mathbf{y}_j'$ não é o plano de produção de lucro máximo a esse vetor de preços.

O plano de produção $\mathbf{y}_j^*$ é o plano de lucro máximo pois

$$Y_j \subset \{\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^\ell \mid \mathbf{y}_j \cdot \mathbf{p} \leq \mathbf{y}_j^* \cdot \mathbf{p}\}.$$

Interpretação gráfica: o caso de dois bens

Usando o conjunto de produção



O conjunto de produção possui pontos nos dois semiplanos definidos pela linha de isolucro associada ao vetor de preços $\mathbf{p}$ que passa por $\mathbf{y}_j'$. Logo, $\mathbf{y}_j'$ não é o plano de produção de lucro máximo a esse vetor de preços.

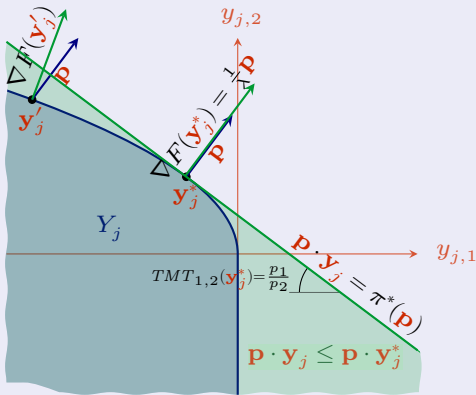
O plano de produção $\mathbf{y}_j^*$ é o plano de lucro máximo pois

$$Y_j \subset \{\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^\ell \mid \mathbf{y}_j \cdot \mathbf{p} \leq \mathbf{y}_j^* \cdot \mathbf{p}\}.$$

Note que, nesse ponto, $\mathbf{p}$ e $\nabla F(\mathbf{y}_j^*)$ têm a mesma direção, o que só é possível caso exista $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{p} = \lambda \nabla F(\mathbf{y}_j^*)$, o que é a condição de primeira ordem.

Interpretação gráfica: o caso de dois bens

Usando o conjunto de produção



O conjunto de produção possui pontos nos dois semiplanos definidos pela linha de isolucro associada ao vetor de preços $\mathbf{p}$ que passa por $\mathbf{y}_j'$. Logo, $\mathbf{y}_j'$ não é o plano de produção de lucro máximo a esse vetor de preços.

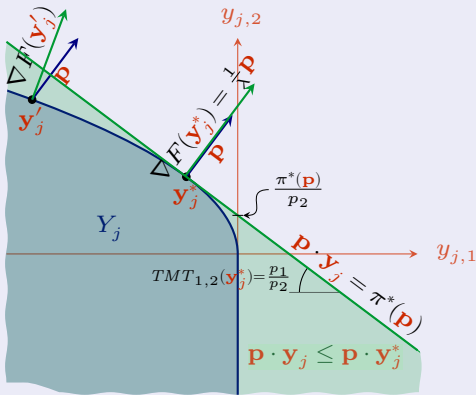
O plano de produção $\mathbf{y}_j^*$ é o plano de lucro máximo pois

$$Y_j \subset \{\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^\ell \mid \mathbf{y}_j \cdot \mathbf{p} \leq \mathbf{y}_j^* \cdot \mathbf{p}\}.$$

Note que, nesse ponto, $\mathbf{p}$ e $\nabla F(\mathbf{y}_j^*)$ têm a mesma direção, o que só é possível caso exista $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{p} = \lambda \nabla F(\mathbf{y}_j^*)$, o que é a condição de primeira ordem.

Interpretação gráfica: o caso de dois bens

Usando o conjunto de produção



O conjunto de produção possui pontos nos dois semiplanos definidos pela linha de isolucro associada ao vetor de preços $\mathbf{p}$ que passa por $\mathbf{y}'_j$. Logo, $\mathbf{y}'_j$ não é o plano de produção de lucro máximo a esse vetor de preços.

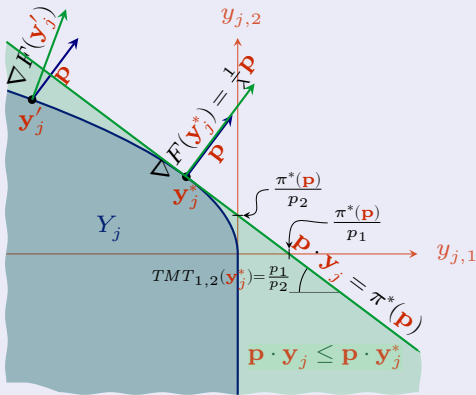
O plano de produção $\mathbf{y}_j^*$ é o plano de lucro máximo pois

$$Y_j \subset \{\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^\ell \mid \mathbf{y}_j \cdot \mathbf{p} \leq \mathbf{y}_j^* \cdot \mathbf{p}\}.$$

Note que, nesse ponto, $\mathbf{p}$ e $\nabla F(\mathbf{y}_j^*)$ têm a mesma direção, o que só é possível caso exista $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{p} = \lambda \nabla F(\mathbf{y}_j^*)$, o que é a condição de primeira ordem.

Interpretação gráfica: o caso de dois bens

Usando o conjunto de produção



O conjunto de produção possui pontos nos dois semiplanos definidos pela linha de isolucro associada ao vetor de preços $\mathbf{p}$ que passa por $\mathbf{y}_j'$. Logo, $\mathbf{y}_j'$ não é o plano de produção de lucro máximo a esse vetor de preços.

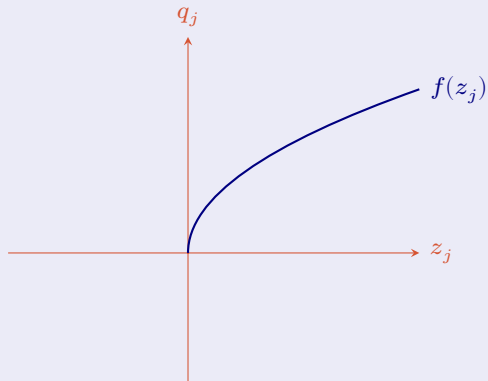
O plano de produção $\mathbf{y}_j^*$ é o plano de lucro máximo pois

$$Y_j \subset \{\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^\ell : \mathbf{y}_j \cdot \mathbf{p} \leq \mathbf{y}_j^* \cdot \mathbf{p}\}.$$

Note que, nesse ponto, $\mathbf{p}$ e $\nabla F(\mathbf{y}_j^*)$ têm a mesma direção, o que só é possível caso exista $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{p} = \lambda \nabla F(\mathbf{y}_j^*)$, o que é a condição de primeira ordem.

Interpretação gráfica: o caso de dois bens

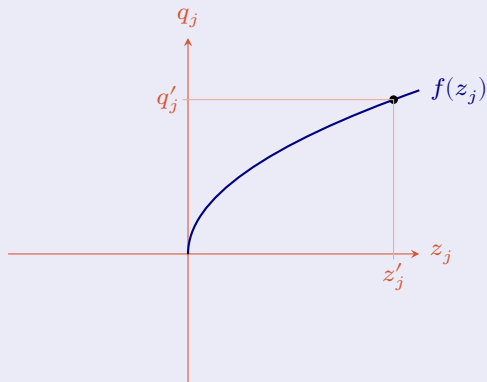
Usando a função de produção



O gráfico da função de produção é a representação espelhada do trecho eficiente da fronteira de transformação.

Interpretação gráfica: o caso de dois bens

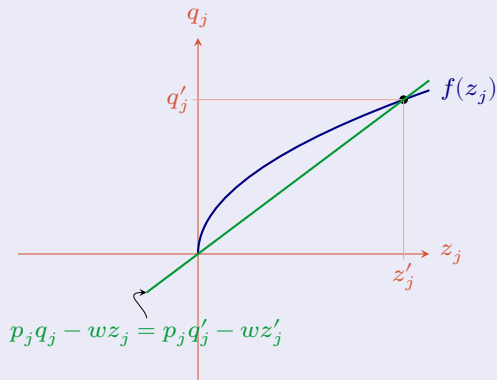
Usando a função de produção



O gráfico da função de produção é a representação espelhada do trecho eficiente da fronteira de transformação.

Interpretação gráfica: o caso de dois bens

Usando a função de produção

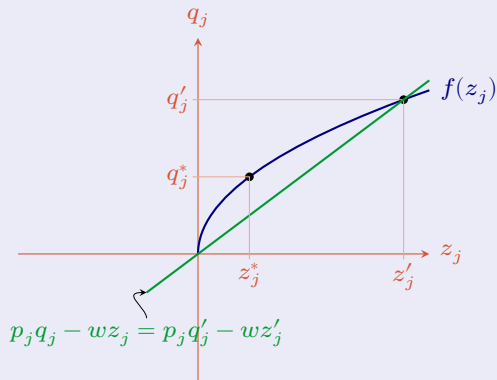


O gráfico da função de produção é a representação espelhada do trecho eficiente da fronteira de transformação.

Esse gráfico contém pontos acima da linha de isolucro associada ao emprego da quantidade z'_j do insumo e produção de q'_j unidades de produto. Portanto, tal ponto não é de lucro máximo.

Interpretação gráfica: o caso de dois bens

Usando a função de produção

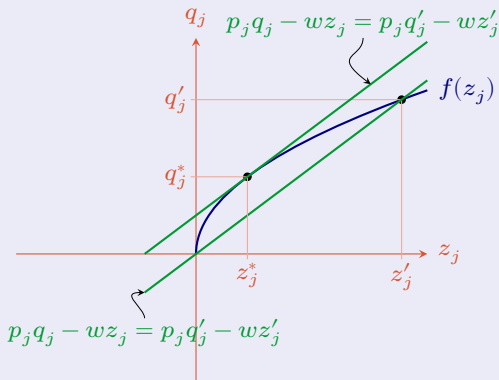


O gráfico da função de produção é a representação espelhada do trecho eficiente da fronteira de transformação.

Esse gráfico contém pontos acima da linha de isolucro associada ao emprego da quantidade z'_j do insumo e produção de q'_j unidades de produto. Portanto, tal ponto não é de lucro máximo.

Interpretação gráfica: o caso de dois bens

Usando a função de produção



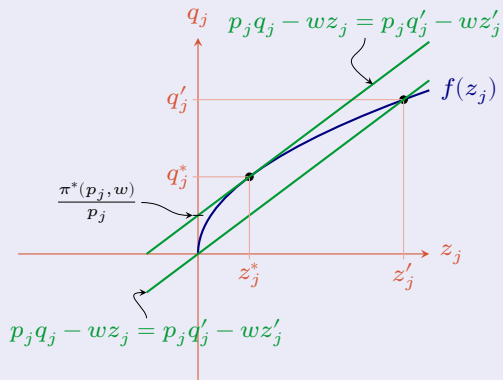
O gráfico da função de produção é a representação espelhada do trecho eficiente da fronteira de transformação.

Esse gráfico contém pontos acima da linha de isolucro associada ao emprego da quantidade z_j' do insumo e produção de q_j' unidades de produto. Portanto, tal ponto não é de lucro máximo.

O lucro é maximizado quando são empregadas z_j^* unidades de insumo para produzir q_j^* unidades de produto. A curva de isolucro associada a essa escolha tangencia por cima o gráfico da função de produção, o que implica $PMg = \frac{p_1}{p_2}$.

Interpretação gráfica: o caso de dois bens

Usando a função de produção



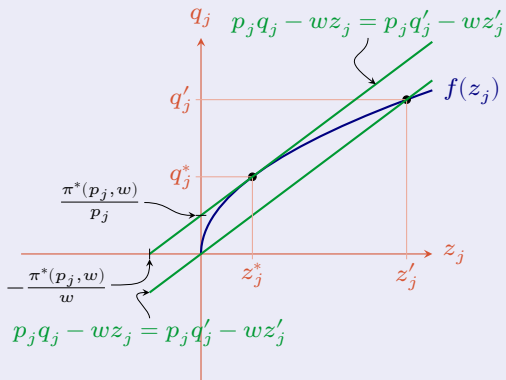
O gráfico da função de produção é a representação espelhada do trecho eficiente da fronteira de transformação.

Esse gráfico contém pontos acima da linha de isolucro associada ao emprego da quantidade z_j' do insumo e produção de q_j' unidades de produto. Portanto, tal ponto não é de lucro máximo.

O lucro é maximizado quando são empregadas z_j^* unidades de insumo para produzir q_j^* unidades de produto. A curva de isolucro associada a essa escolha tangencia por cima o gráfico da função de produção, o que implica $PMg = \frac{p_1}{p_2}$.

Interpretação gráfica: o caso de dois bens

Usando a função de produção



O gráfico da função de produção é a representação espelhada do trecho eficiente da fronteira de transformação.

Esse gráfico contém pontos acima da linha de isolucro associada ao emprego da quantidade z'_j do insumo e produção de q'_j unidades de produto. Portanto, tal ponto não é de lucro máximo.

O lucro é maximizado quando são empregadas z_j^* unidades de insumo para produzir q_j^* unidades de produto. A curva de isolucro associada a essa escolha tangencia por cima o gráfico da função de produção, o que implica $PMg = \frac{p_1}{p_2}$.

Interpretação gráfica: fatia com um insumo e um produto

Fatia do conjunto de produção

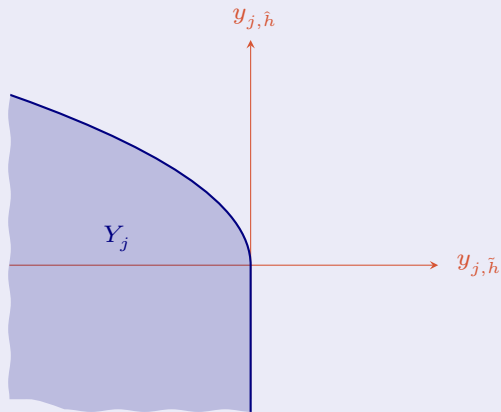


Figura assume $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

Interpretação gráfica: fatia com um insumo e um produto

Fatia do conjunto de produção

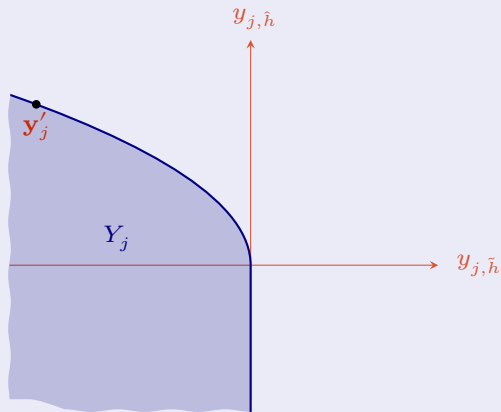


Figura assume $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

Interpretação gráfica: fatia com um insumo e um produto

Fatia do conjunto de produção

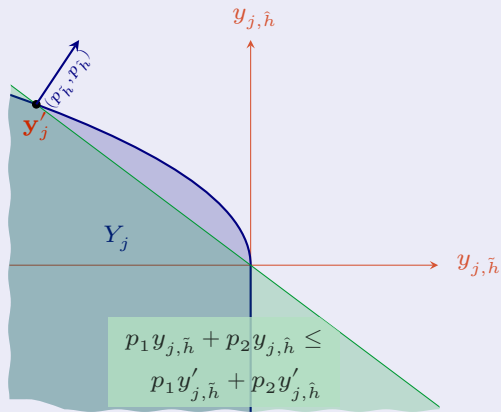


Figura assume $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

Interpretação gráfica: fatia com um insumo e um produto

Fatia do conjunto de produção

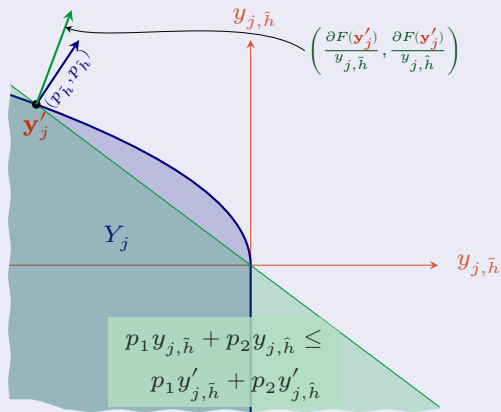


Figura assume $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

Interpretação gráfica: fatia com um insumo e um produto

Fatia do conjunto de produção

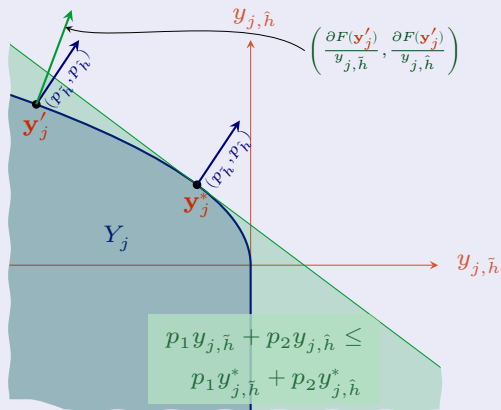


Figura assume $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

Interpretação gráfica: fatia com um insumo e um produto

Fatia do conjunto de produção

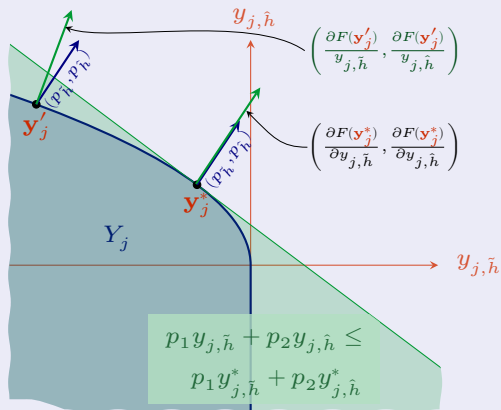


Figura assume $y_{j,h} = y^*_{j,h}$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

Interpretação gráfica: fatia com um insumo e um produto

Fatia do conjunto de produção

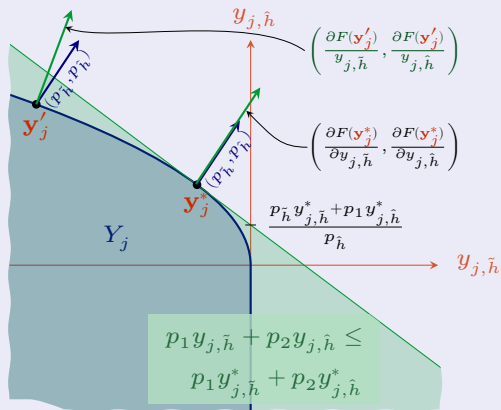


Figura assume $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

Interpretação gráfica: fatia com um insumo e um produto

Fatia do conjunto de produção

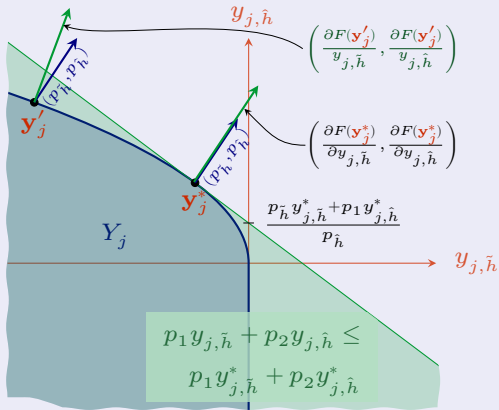


Figura assume $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

Fatia do gráfico da função de produção

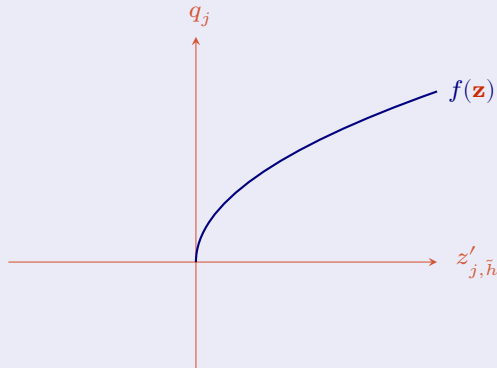


Figura assume $z_{j,h} = z_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$.

Interpretação gráfica: fatia com um insumo e um produto

Fatia do conjunto de produção

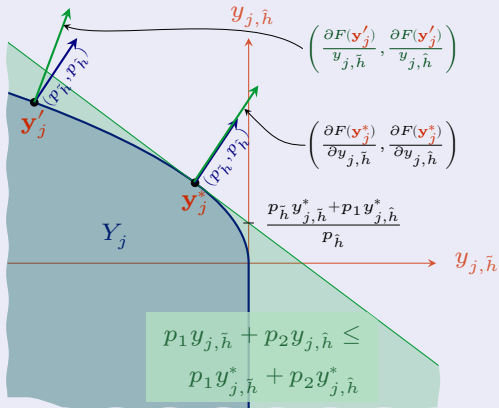


Figura assume $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

Fatia do gráfico da função de produção

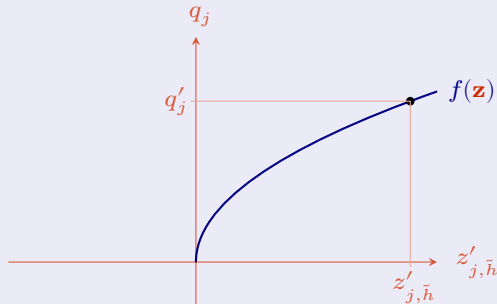


Figura assume $z_{j,h} = z_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$.

Interpretação gráfica: fatia com um insumo e um produto

Fatia do conjunto de produção

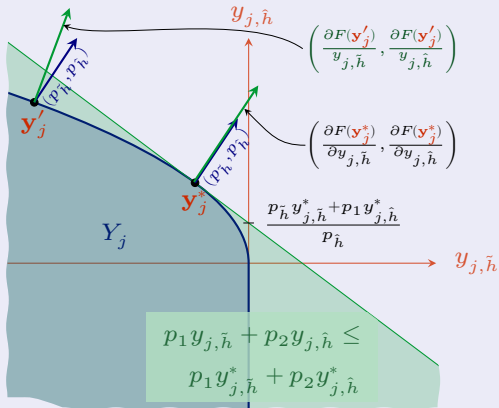


Figura assume $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

Fatia do gráfico da função de produção

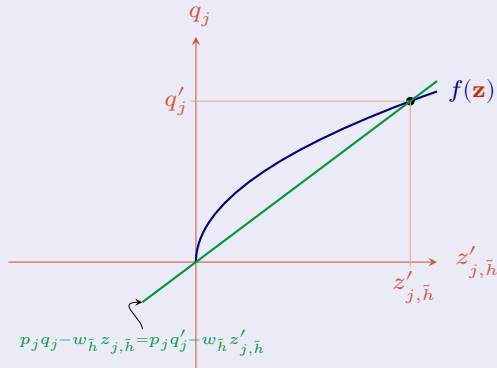


Figura assume $z_{j,h} = z_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$.

Interpretação gráfica: fatia com um insumo e um produto

Fatia do conjunto de produção

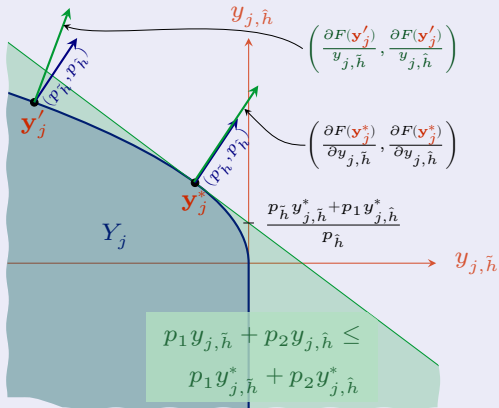


Figura assume $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

Fatia do gráfico da função de produção

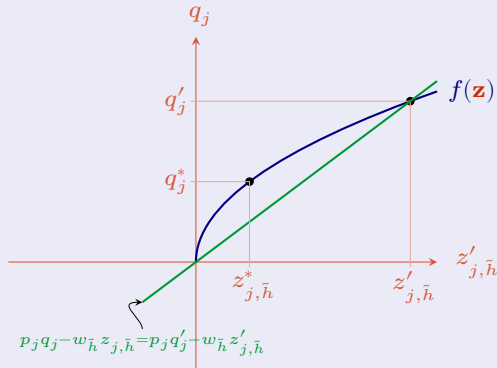


Figura assume $z_{j,h} = z_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$.

Interpretação gráfica: fatia com um insumo e um produto

Fatia do conjunto de produção

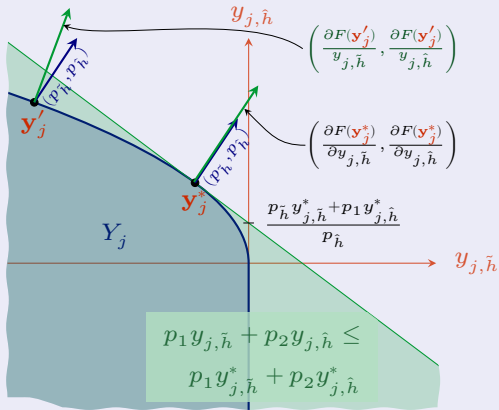


Figura assume $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

Fatia do gráfico da função de produção

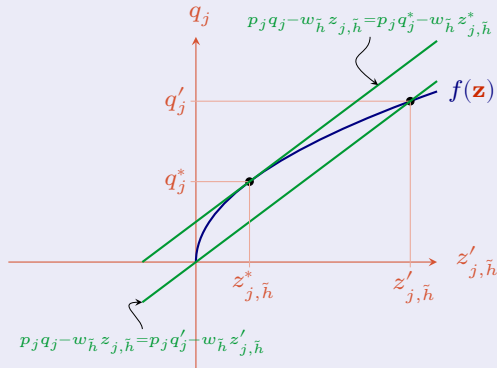


Figura assume $z_{j,h} = z_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$.

Interpretação gráfica: fatia com um insumo e um produto

Fatia do conjunto de produção

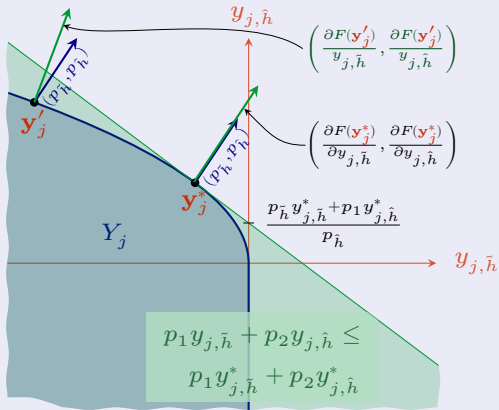


Figura assume $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

Fatia do gráfico da função de produção

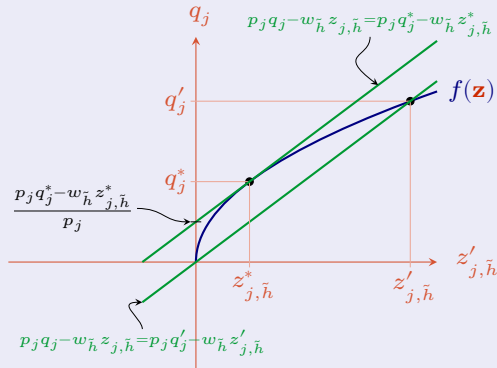


Figura assume $z_{j,h} = z_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$.

Interpretação gráfica: fatia com um insumo e um produto

Fatia do conjunto de produção

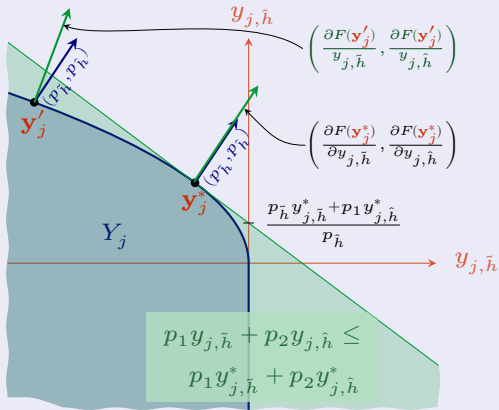


Figura assume $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

Fatia do gráfico da função de produção

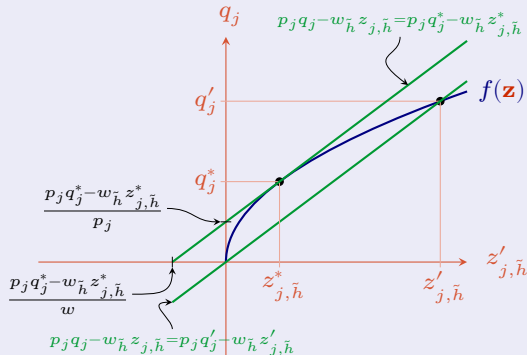


Figura assume $z_{j,h} = z_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$.

Interpretação gráfica: fatia com dois insumos

Fatia do conjunto de produção

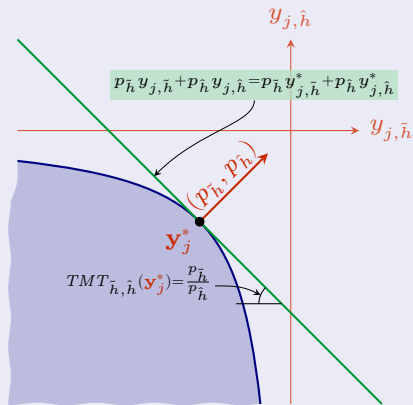


Figura assume $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

Interpretação gráfica: fatia com dois insumos

Fatia do conjunto de produção

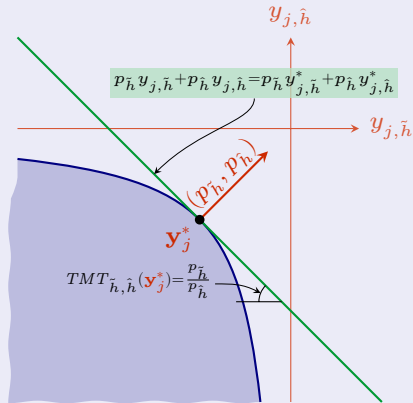


Figura assume $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

Fatia do gráfico da função de produção

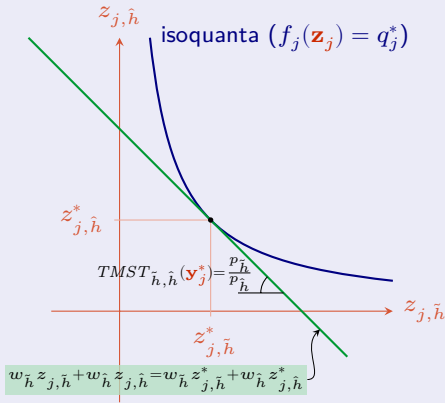
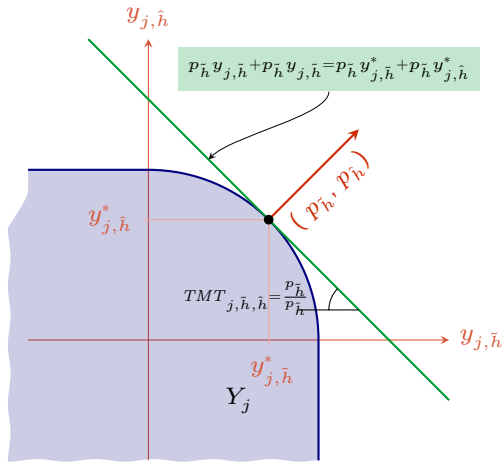


Figura assume $z_{j,h} = z_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

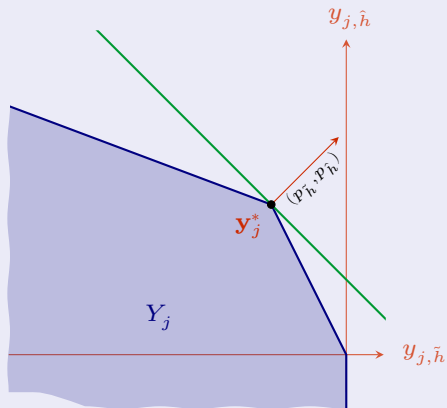
Interpretação gráfica: fatia com dois produtos



Assume-se que $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

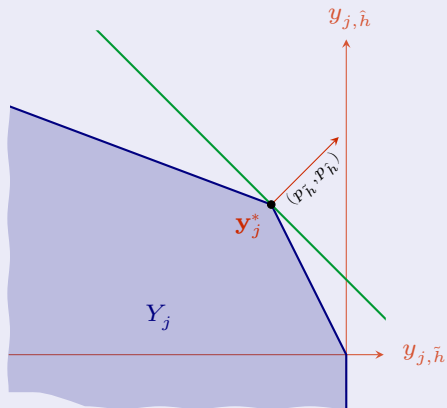
Casos mal comportados: não diferenciabilidade

Fatia do conjunto de produção

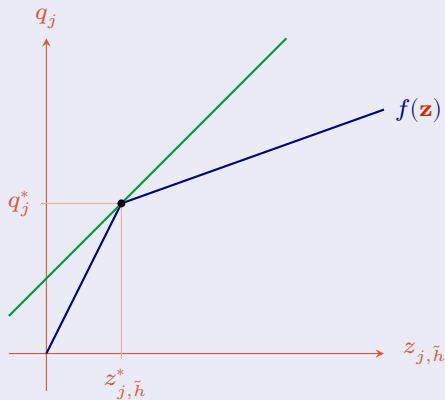


Casos mal comportados: não diferenciabilidade

Fatia do conjunto de produção

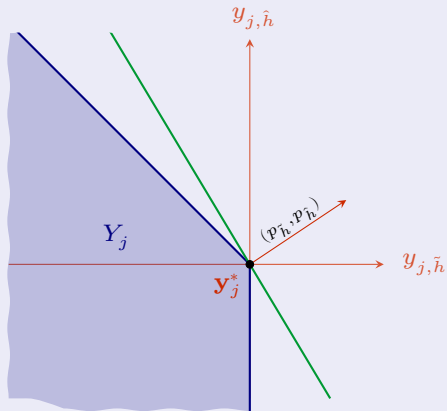


Fatia do gráfico da função de produção

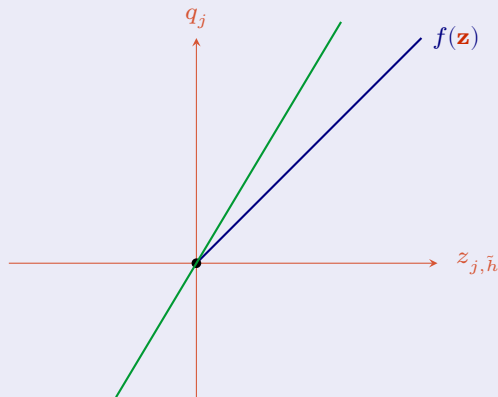


Casos mal comportados: inatividade

Fatia do conjunto de produção

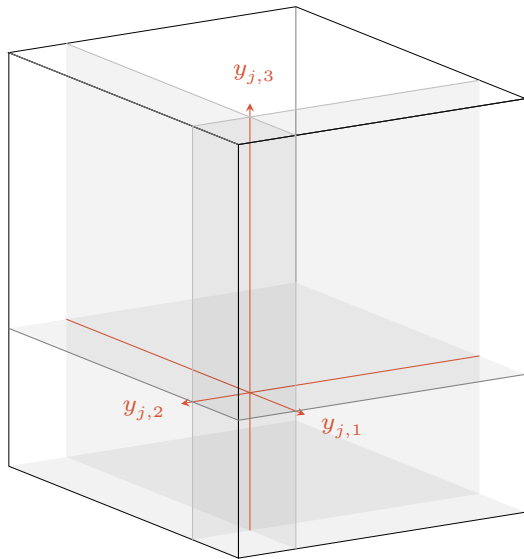


Fatia da função de produção

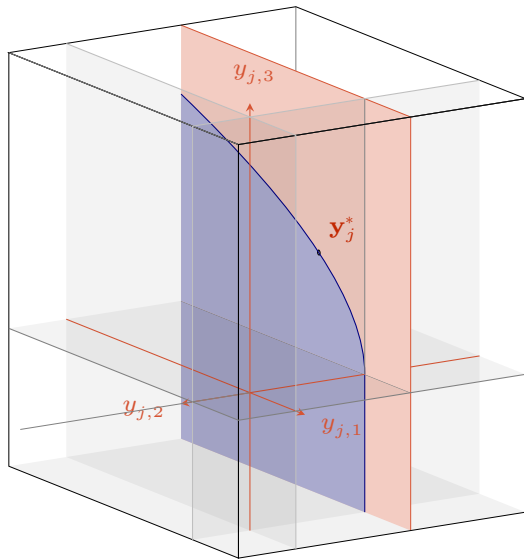


Assume-se que $y_{j,h} = y_{j,h}^*$ caso $h \neq \tilde{h}$ e $h \neq \hat{h}$.

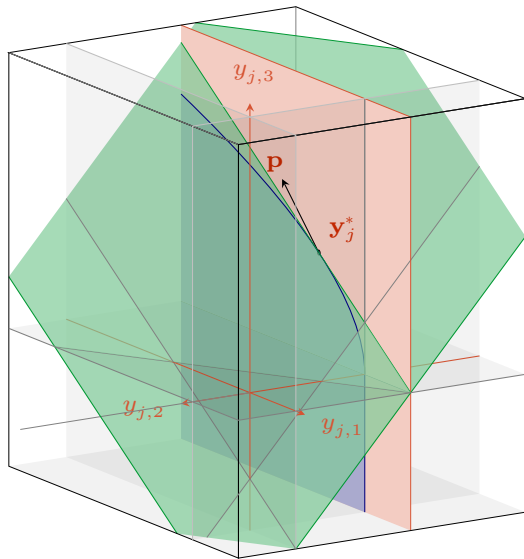
Casos mal comportados: insumo fijo



Casos mal comportados: insumo fijo

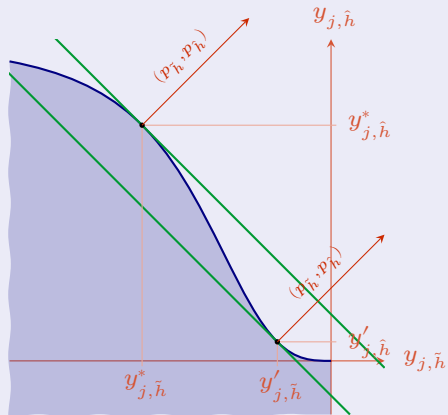


Casos mal comportados: insumo fijo



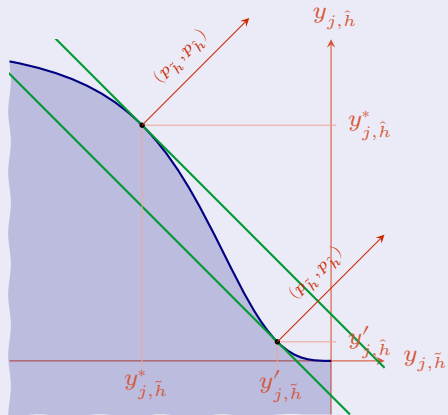
Casos mal comportados: não convexidade

Fatia do conjunto de produção

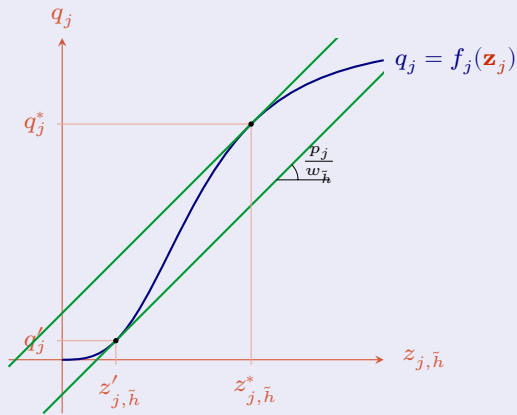


Casos mal comportados: não convexidade

Fatia do conjunto de produção

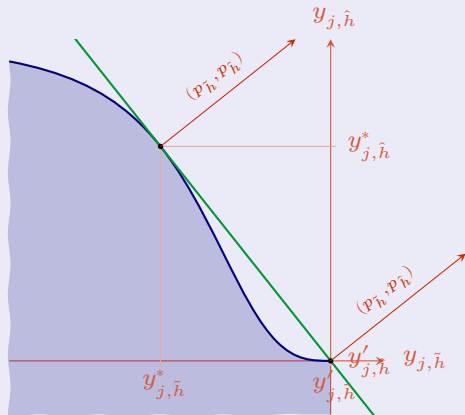


Fatia da função de produção

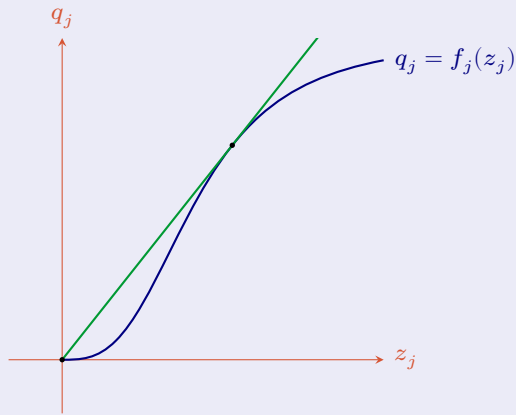


Casos mal comportados: múltiplos equilíbrios

Fatia do conjunto de produção



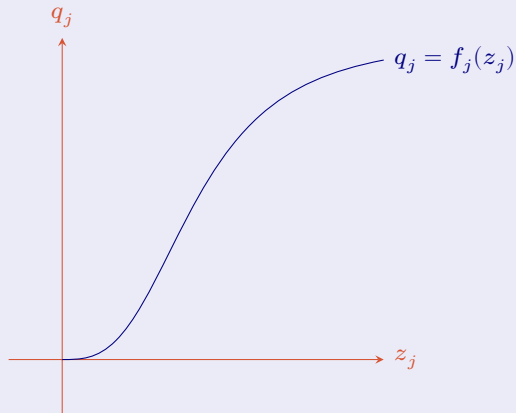
Fatia do gráfico da função de produção



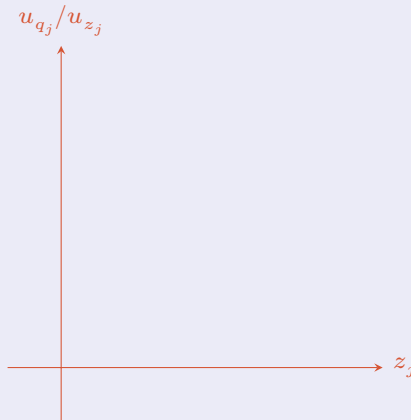
Casos mal comportados: ausência de solução

Curvas de produtividade de um insumo único

Função de produção

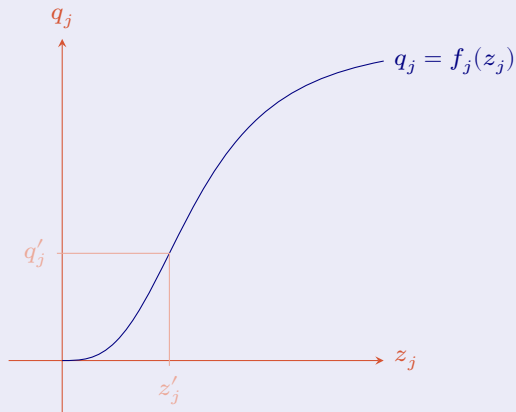


Produtividades unitárias

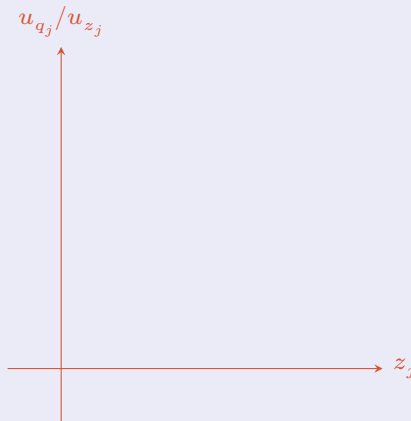


Curvas de produtividade de um insumo único

Função de produção

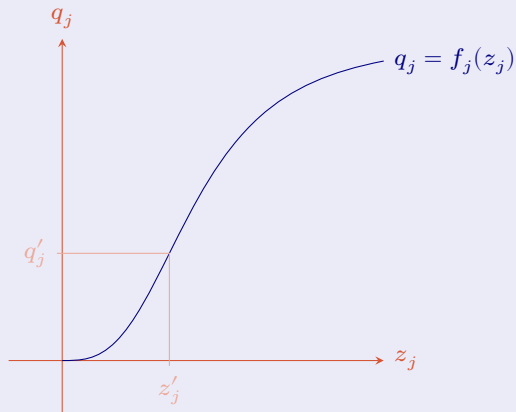


Produtividades unitárias

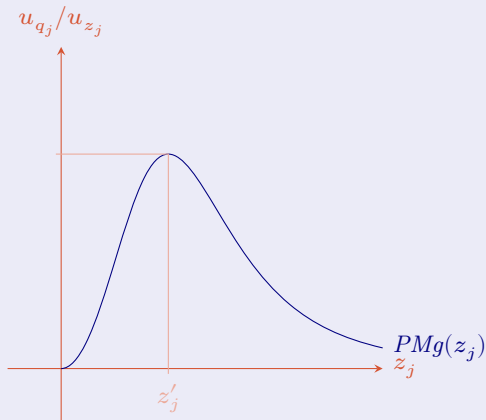


Curvas de produtividade de um insumo único

Função de produção

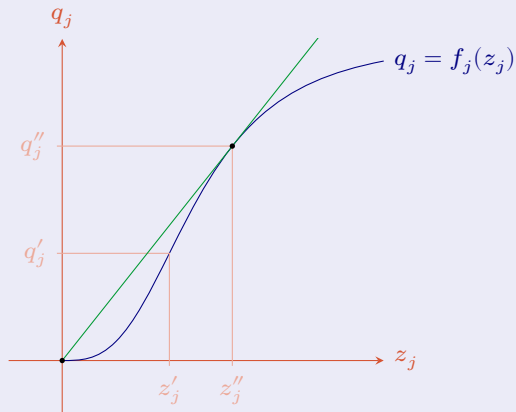


Produtividades unitárias

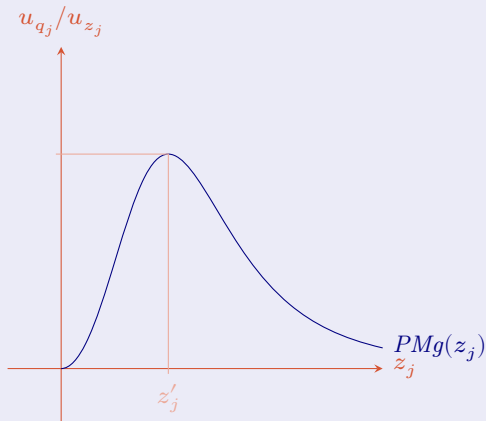


Curvas de produtividade de um insumo único

Função de produção

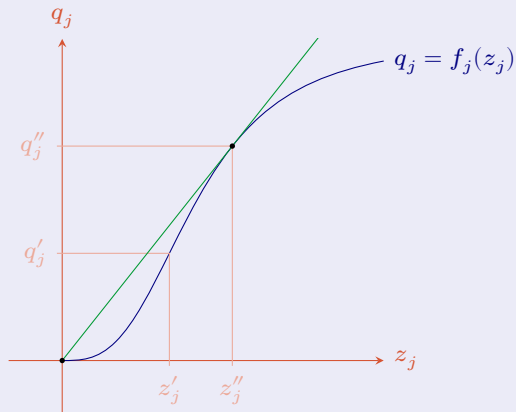


Produtividades unitárias

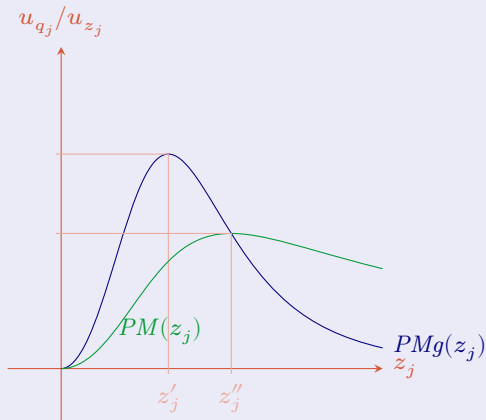


Curvas de produtividade de um insumo único

Função de produção



Produtividades unitárias



Relação entre produtividades média e marginal

$$\frac{dPM(\mathbf{z})}{dz_h} = \frac{d}{dz_h} \frac{f(\mathbf{z})}{z_h}$$

Relação entre produtividades média e marginal

$$\frac{dPM(\mathbf{z})}{dz_h} = \frac{d}{dz_h} \frac{f(\mathbf{z})}{z_h} = \frac{z_h \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h} - f(\mathbf{z})}{z_h^2}$$

Relação entre produtividades média e marginal

$$\begin{aligned}\frac{dPM(\mathbf{z})}{dz_h} &= \frac{d}{dz_h} \frac{f(\mathbf{z})}{z_h} = \frac{z_h \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h} - f(\mathbf{z})}{z_h^2} \\ &= \frac{\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h} - \frac{f(\mathbf{z})}{z_h}}{z_h}\end{aligned}$$

Relação entre produtividades média e marginal

$$\begin{aligned}\frac{dPM(\mathbf{z})}{dz_h} &= \frac{d}{dz_h} \frac{f(\mathbf{z})}{z_h} = \frac{z_h \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h} - f(\mathbf{z})}{z_h^2} \\ &= \frac{\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h} - \frac{f(\mathbf{z})}{z_h}}{z_h} = \frac{PMg_h(\mathbf{z}) - PM_h(\mathbf{z})}{z_h}\end{aligned}$$

Relação entre produtividades média e marginal

$$\begin{aligned}\frac{dPM(\mathbf{z})}{dz_h} &= \frac{d}{dz_h} \frac{f(\mathbf{z})}{z_h} = \frac{z_h \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h} - f(\mathbf{z})}{z_h^2} \\ &= \frac{\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h} - \frac{f(\mathbf{z})}{z_h}}{z_h} = \frac{PMg_h(\mathbf{z}) - PM_h(\mathbf{z})}{z_h}\end{aligned}$$

Portanto, $PM(\mathbf{z})$ é crescente, decrescente ou máximo ou mínimo ou ponto de sela em relação a z_h se, e somente se, respectivamente, $PMg_h(\mathbf{z}) > PM_h(\mathbf{z})$, $PMg_h(\mathbf{z}) < PM_h(\mathbf{z})$, ou $PMg_h(\mathbf{z}) = PM_h(\mathbf{z})$.

Relação entre produtividades média e marginal

$$\begin{aligned}\frac{dPM(\mathbf{z})}{dz_h} &= \frac{d}{dz_h} \frac{f(\mathbf{z})}{z_h} = \frac{z_h \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h} - f(\mathbf{z})}{z_h^2} \\ &= \frac{\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_h} - \frac{f(\mathbf{z})}{z_h}}{z_h} = \frac{PMg_h(\mathbf{z}) - PM_h(\mathbf{z})}{z_h}\end{aligned}$$

Portanto, $PM(\mathbf{z})$ é crescente, decrescente ou máximo ou mínimo ou ponto de sela em relação a z_h se, e somente se, respectivamente, $PMg_h(\mathbf{z}) > PM_h(\mathbf{z})$, $PMg_h(\mathbf{z}) < PM_h(\mathbf{z})$, ou $PMg_h(\mathbf{z}) = PM_h(\mathbf{z})$.

Relação entre produtividades média e marginal na origem

Se $f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0, z_{h+1}, \dots, z_\ell) = 0$, então

$$PM(\mathbf{z}) = \frac{f(z_1, \dots, z_{h-1}, z_h, z_{h+1}, \dots, z_\ell)}{z_h}$$

Relação entre produtividades média e marginal na origem

Se $f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0, z_{h+1}, \dots, z_\ell) = 0$, então

$$PM(\mathbf{z}) = \frac{f(z_1, \dots, z_{h-1}, z_h, z_{h+1}, \dots, z_\ell) - f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0, z_{h+1}, \dots, z_\ell)}{z_h}$$

Relação entre produtividades média e marginal na origem

Se $f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0, z_{h+1}, \dots, z_\ell) = 0$, então

$$PM(\mathbf{z}) = \frac{f(z_1, \dots, z_{h-1}, z_h, z_{h+1}, \dots, z_\ell) - f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0, z_{h+1}, \dots, z_\ell)}{z_h - 0}$$

Relação entre produtividades média e marginal na origem

Se $f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0, z_{h+1}, \dots, z_\ell) = 0$, então

$$PM(\mathbf{z}) = \frac{f(z_1, \dots, z_{h-1}, z_h, z_{h+1}, \dots, z_\ell) - f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0, z_{h+1}, \dots, z_\ell)}{z_h - 0}$$

e, portanto

$$\lim_{z_h \rightarrow 0} PM(\mathbf{z}) = \lim_{z_h \rightarrow 0} \frac{f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0 + z_h, z_{h+1}, \dots, z_\ell) - f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0, z_{h+1}, \dots, z_\ell)}{z_h - 0}$$

Relação entre produtividades média e marginal na origem

Se $f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0, z_{h+1}, \dots, z_\ell) = 0$, então

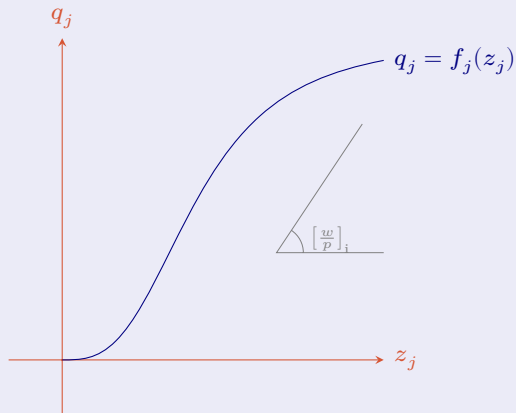
$$PM(\mathbf{z}) = \frac{f(z_1, \dots, z_{h-1}, z_h, z_{h+1}, \dots, z_\ell) - f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0, z_{h+1}, \dots, z_\ell)}{z_h - 0}$$

e, portanto

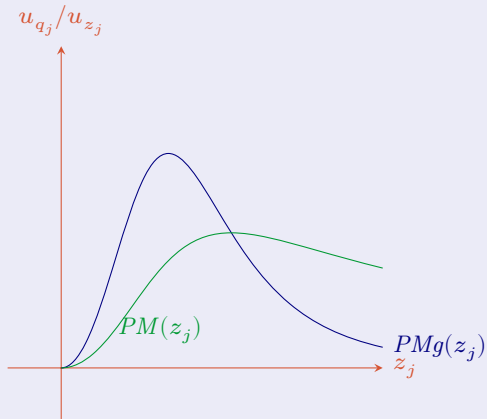
$$\begin{aligned} \lim_{z_h \rightarrow 0} PM(\mathbf{z}) &= \lim_{z_h \rightarrow 0} \frac{f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0 + z_h, z_{h+1}, \dots, z_\ell) - f(z_1, \dots, z_{h-1}, 0, z_{h+1}, \dots, z_\ell)}{z_h - 0} \\ &= PMg(z_1, \dots, z_{h-1}, 0, z_{h+1}, \dots, z_\ell) \end{aligned}$$

Curva de demanda de um insumo único

Função de produção

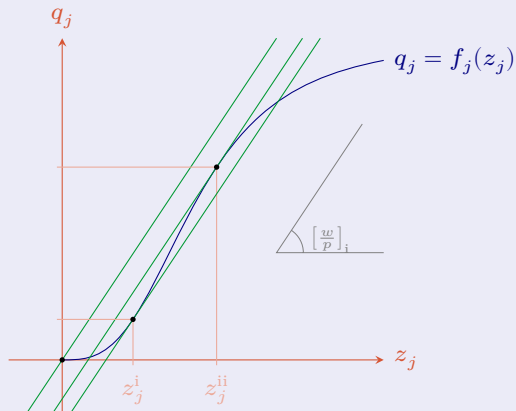


Produtividades unitárias

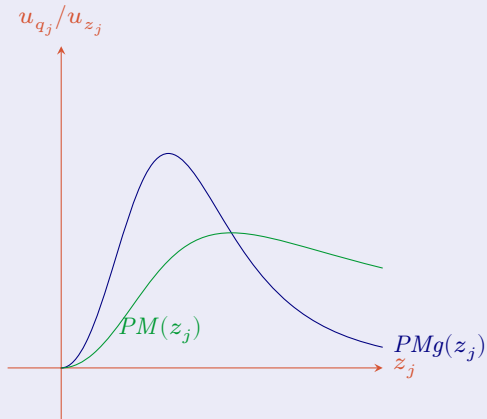


Curva de demanda de um insumo único

Função de produção

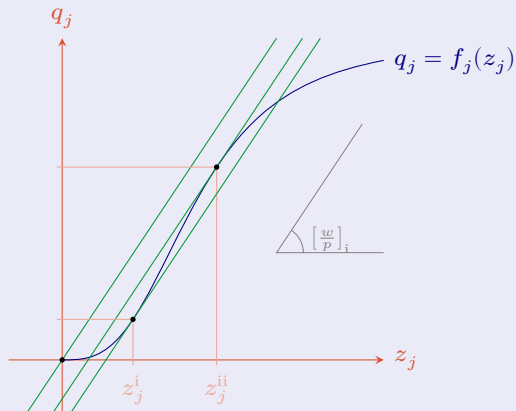


Produtividades unitárias

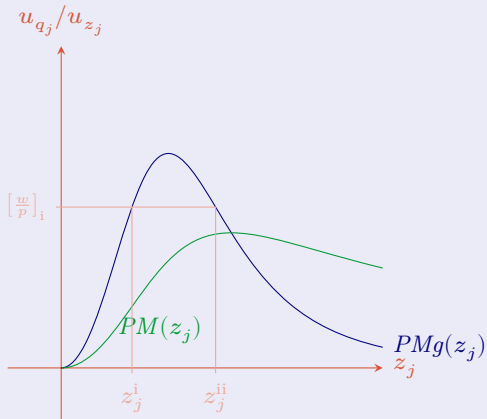


Curva de demanda de um insumo único

Função de produção

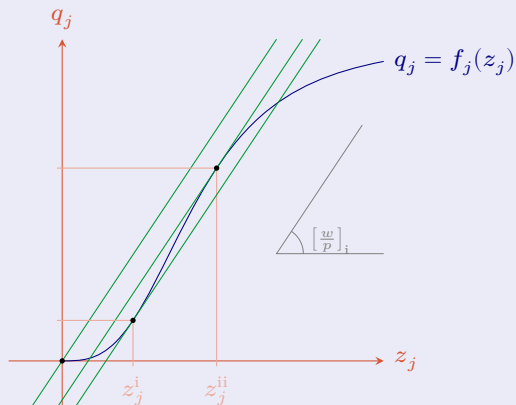


Produtividades unitárias

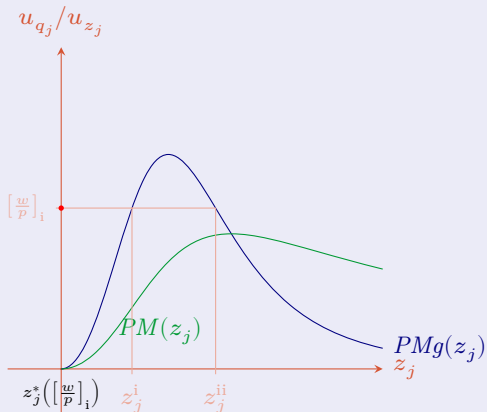


Curva de demanda de um insumo único

Função de produção

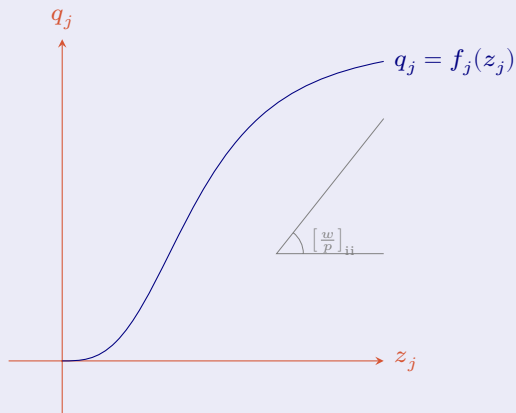


Produtividades unitárias

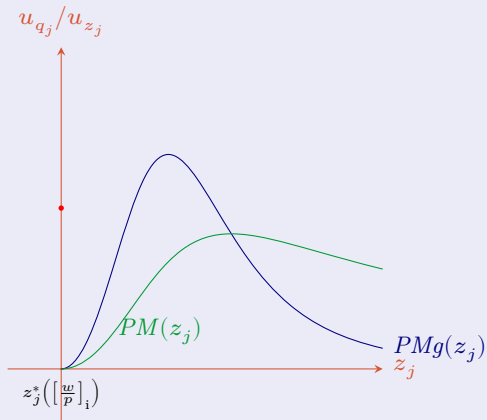


Curva de demanda de um insumo único

Função de produção

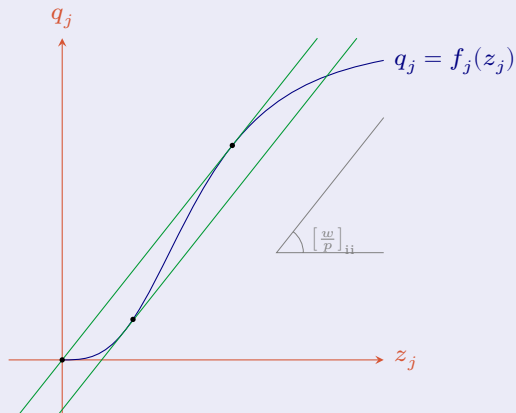


Produtividades unitárias

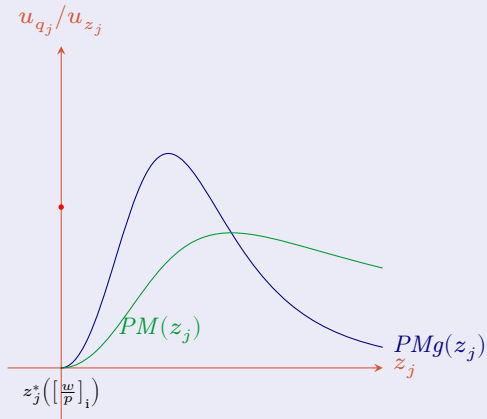


Curva de demanda de um insumo único

Função de produção

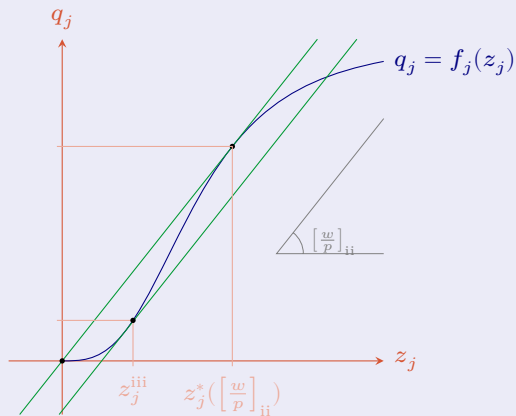


Produtividades unitárias

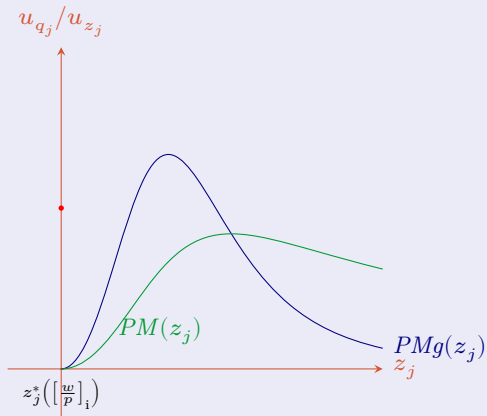


Curva de demanda de um insumo único

Função de produção

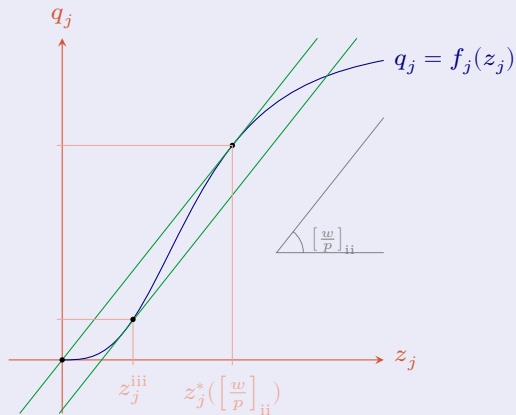


Produtividades unitárias

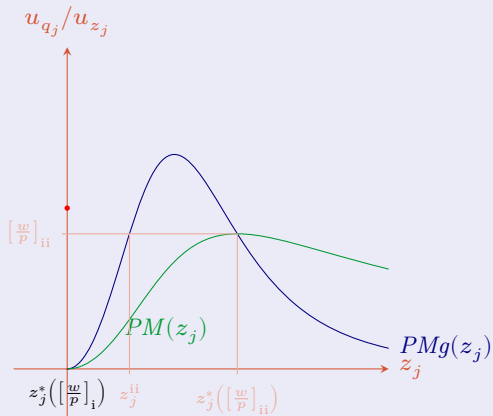


Curva de demanda de um insumo único

Função de produção

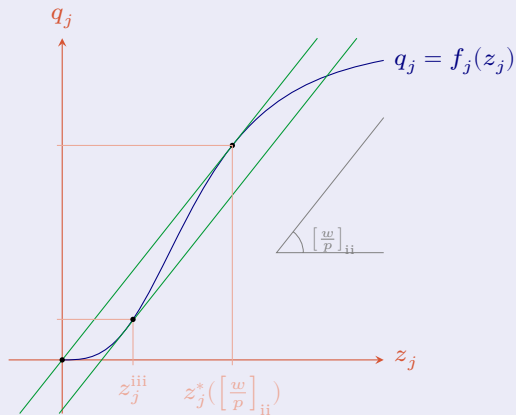


Produtividades unitárias

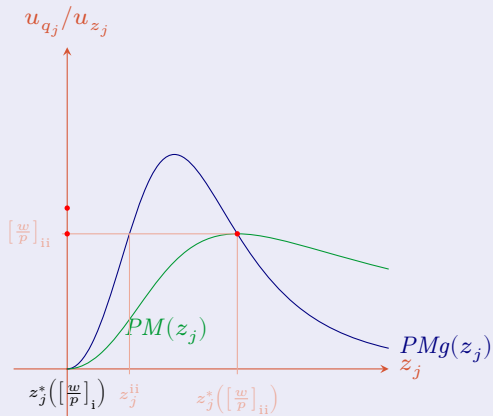


Curva de demanda de um insumo único

Função de produção

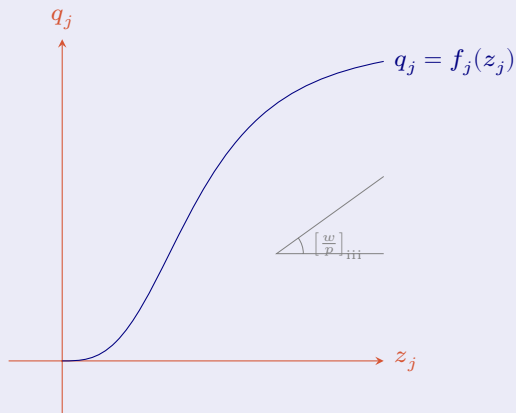


Produtividades unitárias

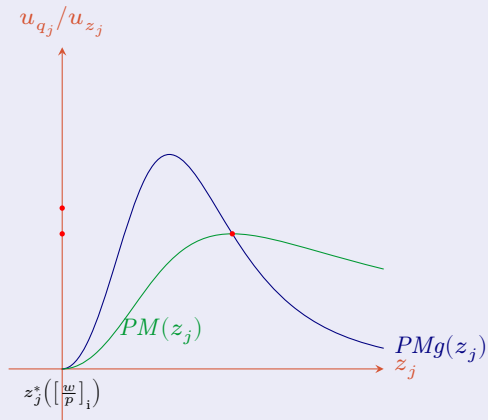


Curva de demanda de um insumo único

Função de produção

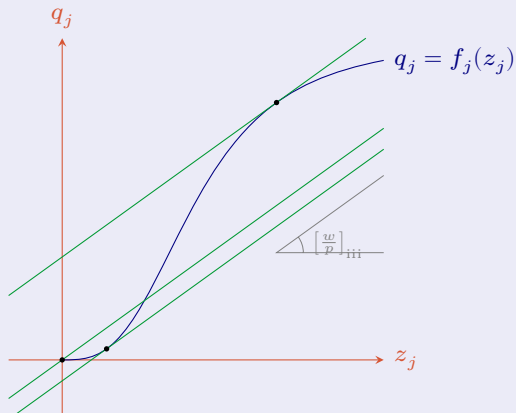


Produtividades unitárias

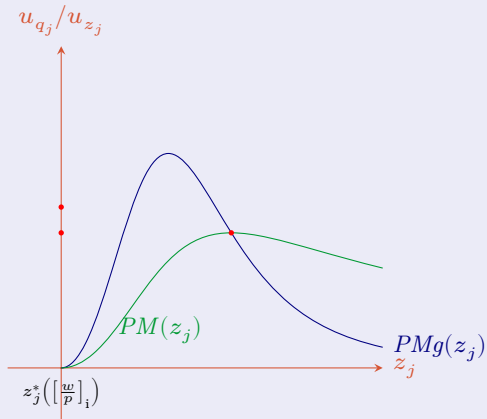


Curva de demanda de um insumo único

Função de produção

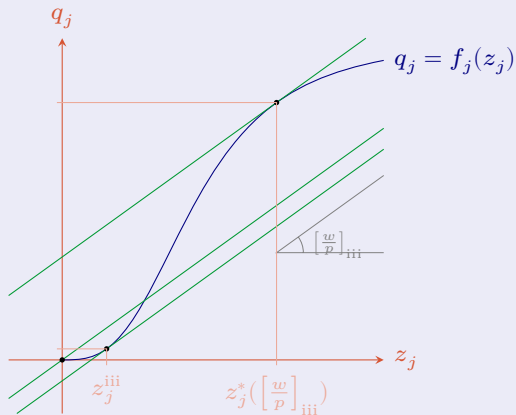


Produtividades unitárias

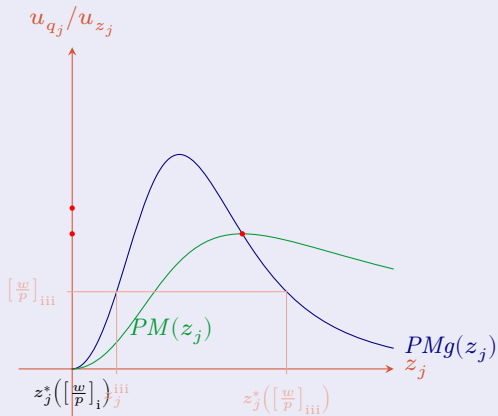


Curva de demanda de um insumo único

Função de produção

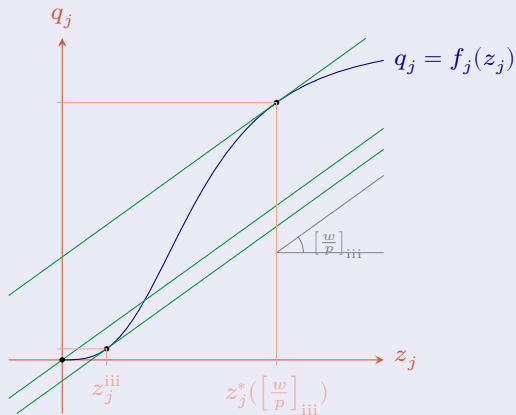


Produtividades unitárias

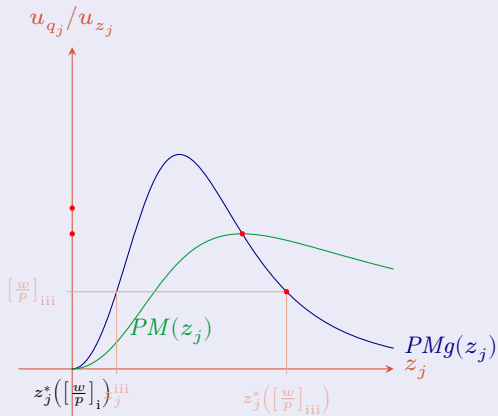


Curva de demanda de um insumo único

Função de produção

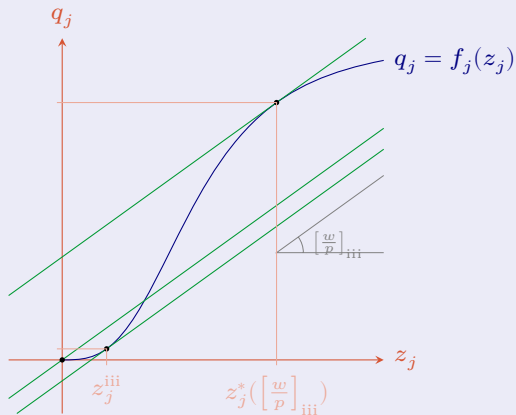


Produtividades unitárias

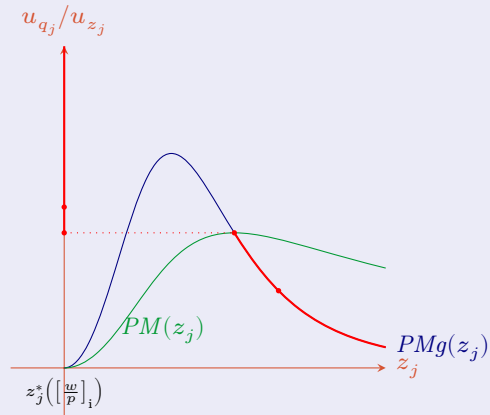


Curva de demanda de um insumo único

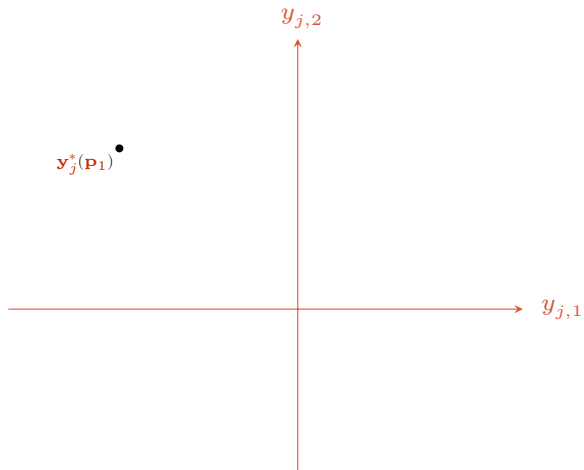
Função de produção



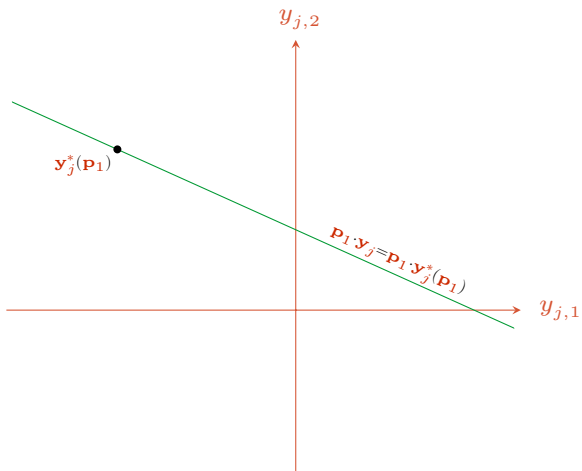
Produtividades unitárias



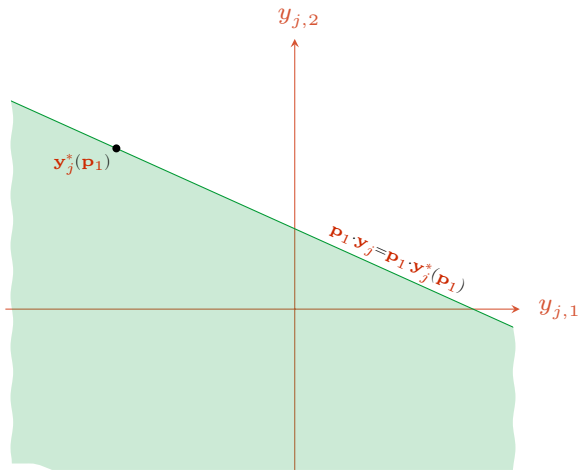
Inferindo o conjunto de produção



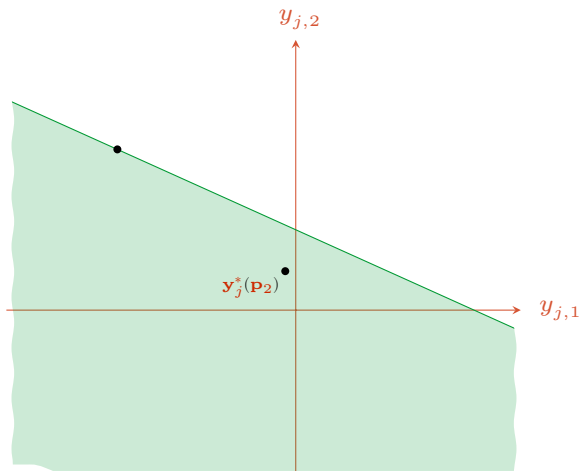
Inferindo o conjunto de produção



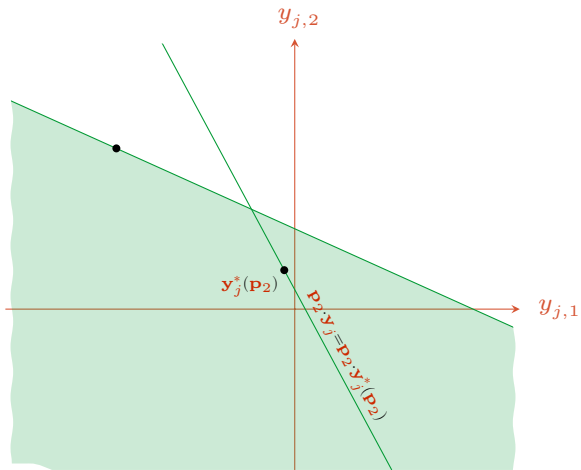
Inferindo o conjunto de produção



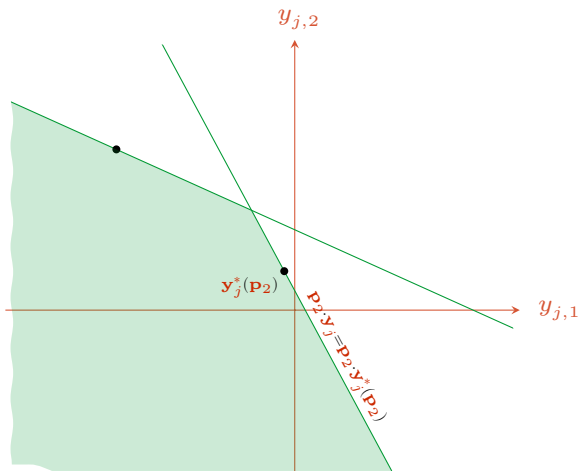
Inferindo o conjunto de produção



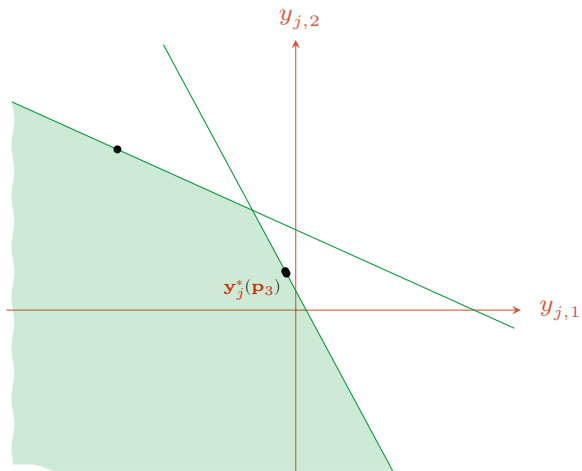
Inferindo o conjunto de produção



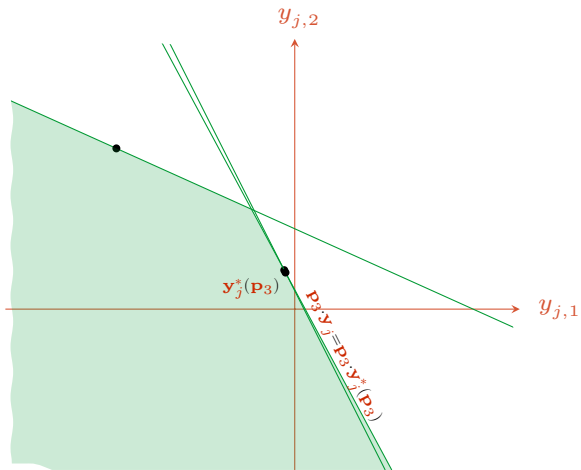
Inferindo o conjunto de produção



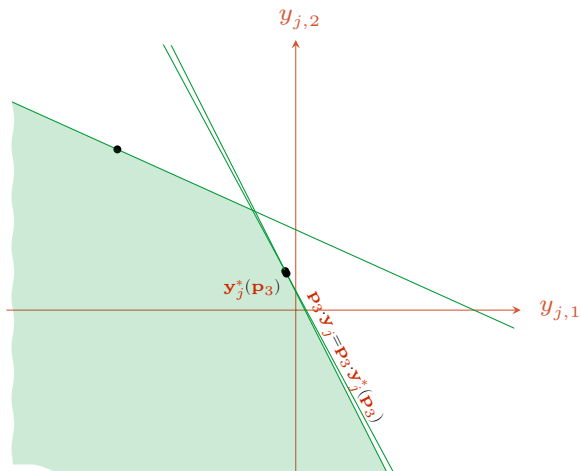
Inferindo o conjunto de produção



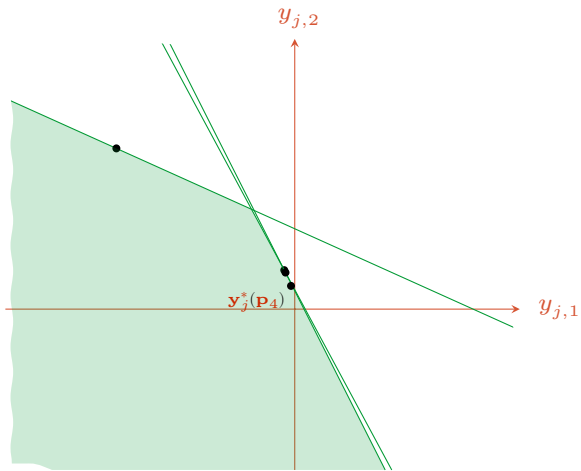
Inferindo o conjunto de produção



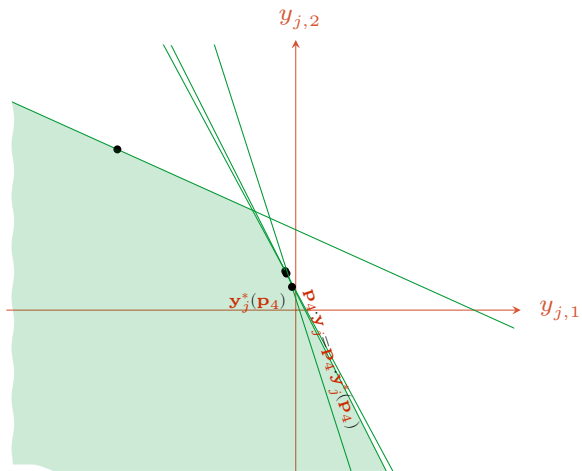
Inferindo o conjunto de produção



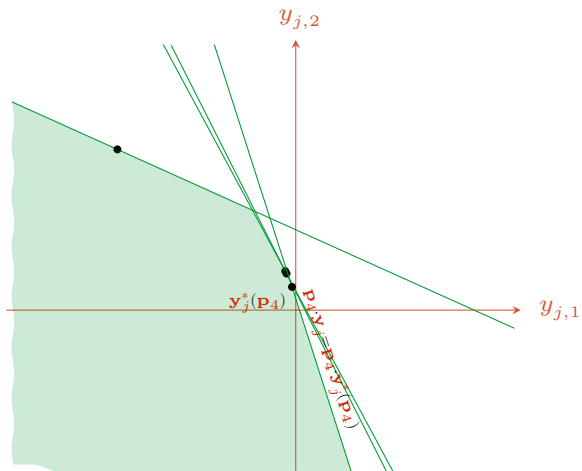
Inferindo o conjunto de produção



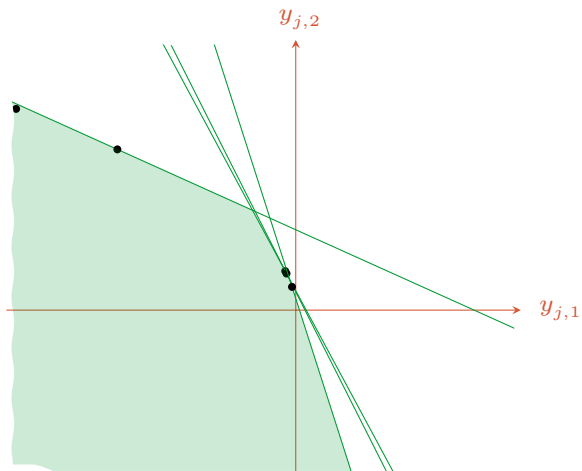
Inferindo o conjunto de produção



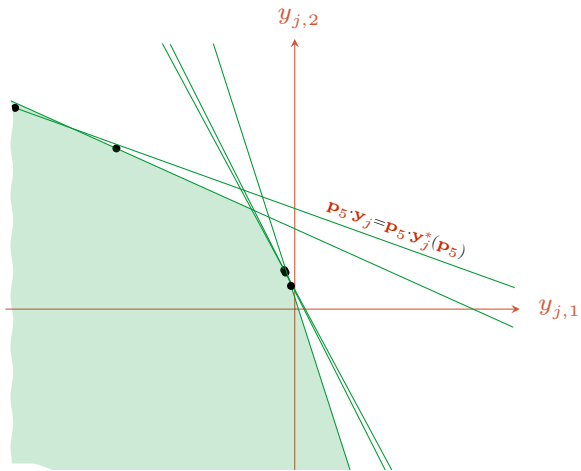
Inferindo o conjunto de produção



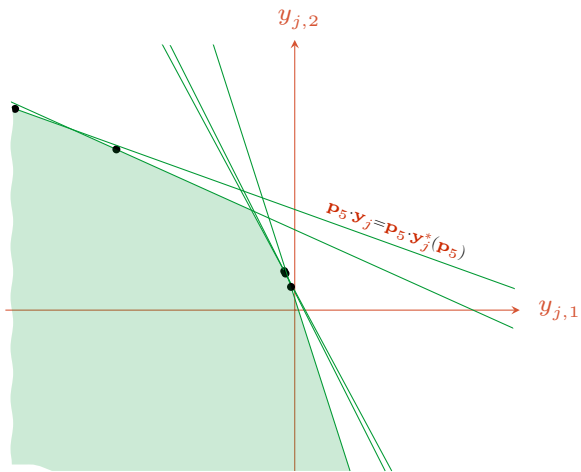
Inferindo o conjunto de produção



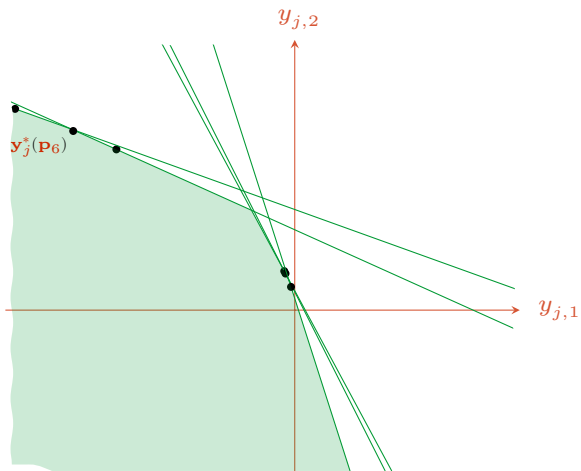
Inferindo o conjunto de produção



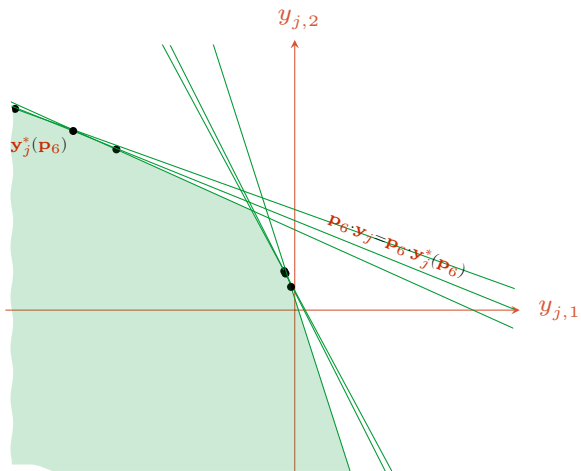
Inferindo o conjunto de produção



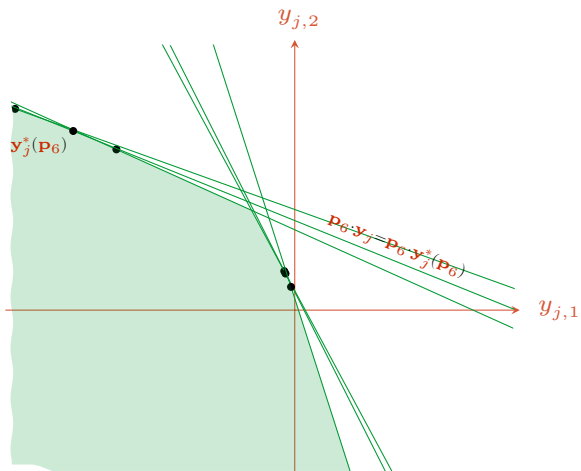
Inferindo o conjunto de produção



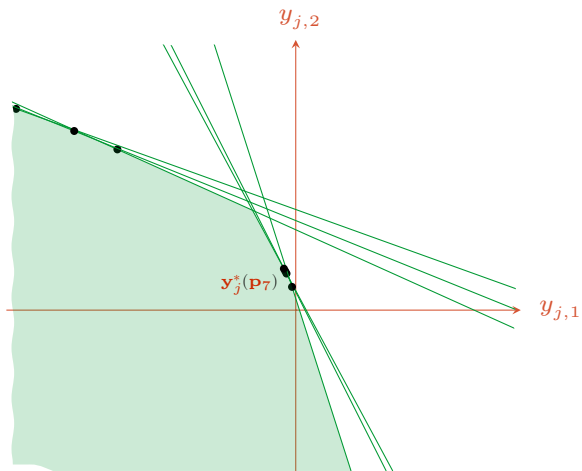
Inferindo o conjunto de produção



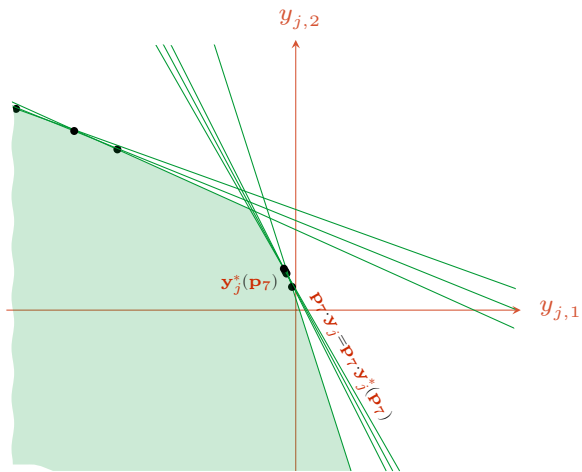
Inferindo o conjunto de produção



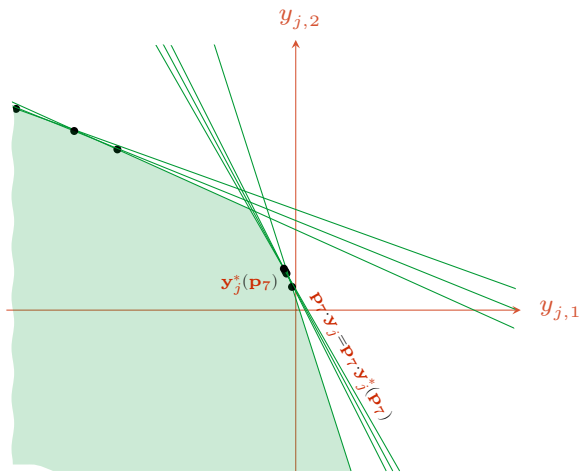
Inferindo o conjunto de produção



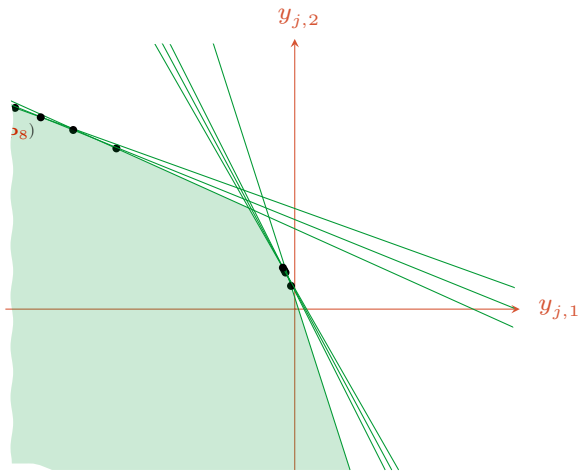
Inferindo o conjunto de produção



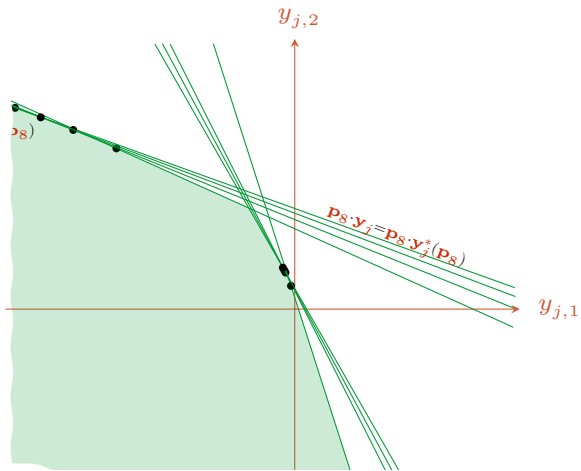
Inferindo o conjunto de produção



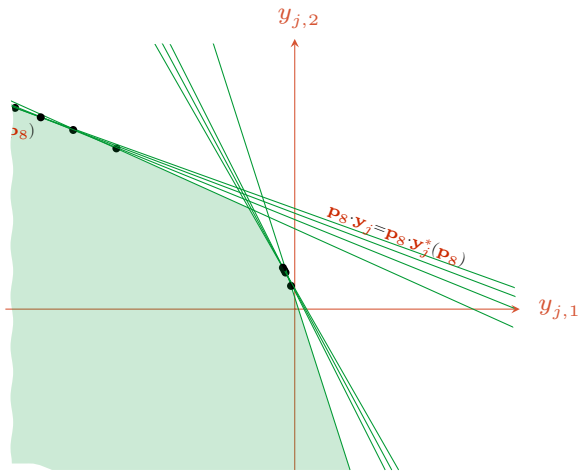
Inferindo o conjunto de produção



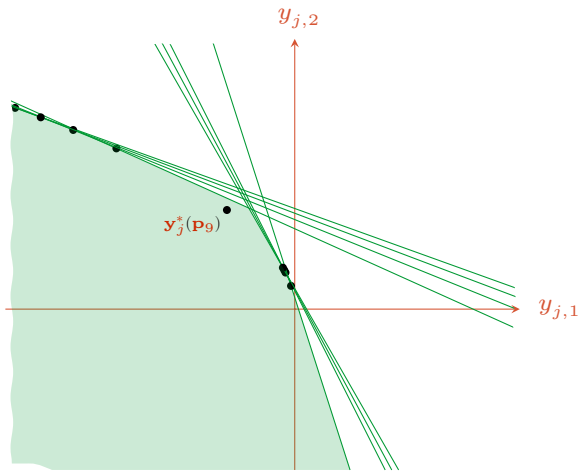
Inferindo o conjunto de produção



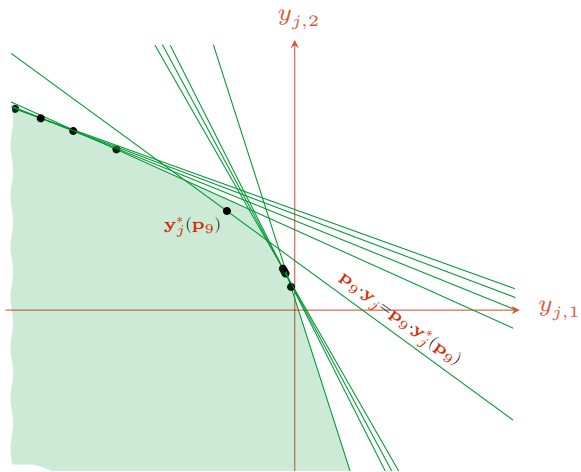
Inferindo o conjunto de produção



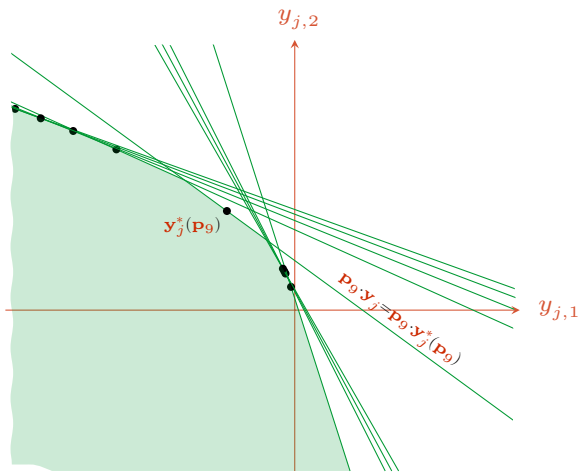
Inferindo o conjunto de produção



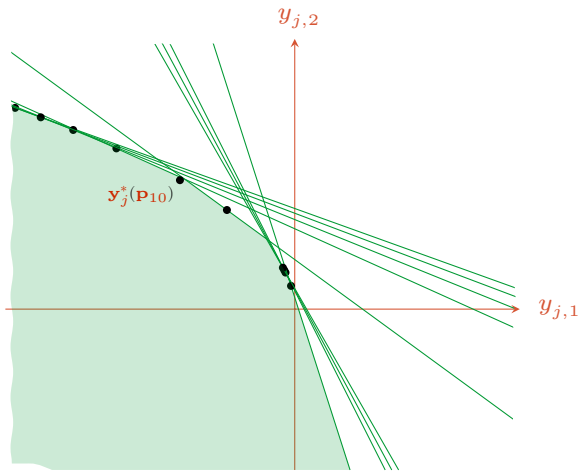
Inferindo o conjunto de produção



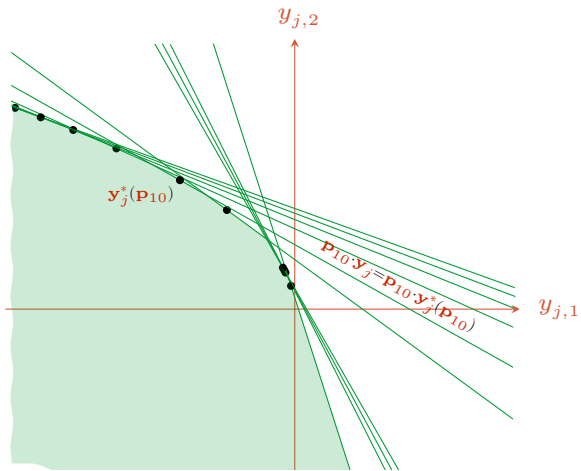
Inferindo o conjunto de produção



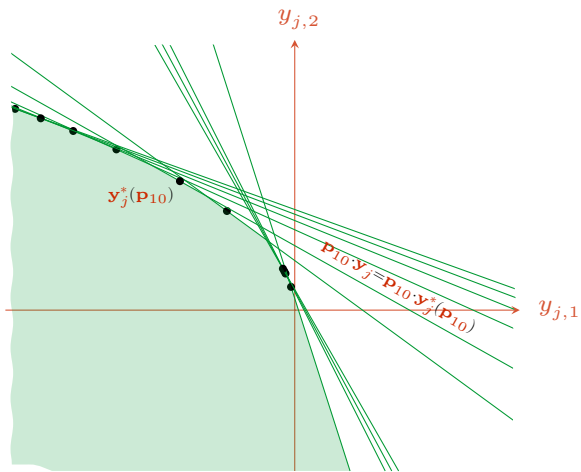
Inferindo o conjunto de produção



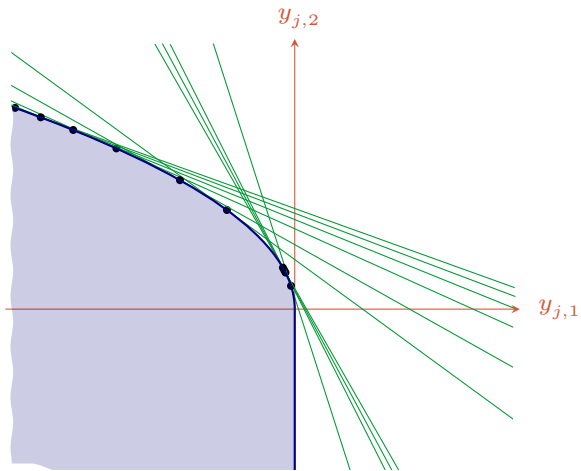
Inferindo o conjunto de produção



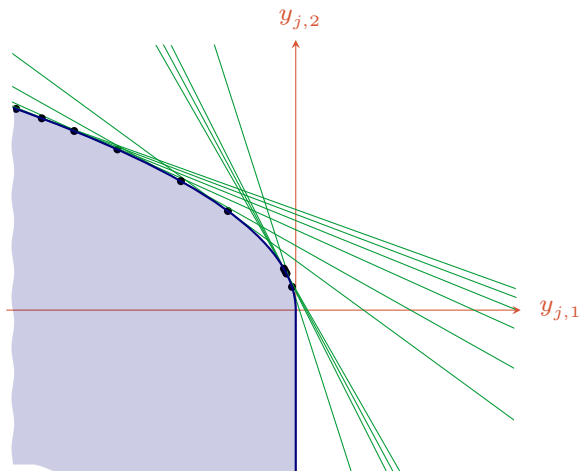
Inferindo o conjunto de produção



Inferindo o conjunto de produção



Inferindo o conjunto de produção



Seja P o domínio da função de oferta. Se Y_j é convexo, então,

$$Y_j = \bigcap_{\mathbf{p} \in P} \{ \mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^\ell : \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j^*(\mathbf{p}) \}$$

Propriedades

Homogeneidade

$\mathbf{y}_j^*(\mathbf{p})$ é homogênea de grau zero e $\pi(\mathbf{p})$ é homogênea de grau 1, ou seja,

$$\forall \alpha > 0, \mathbf{y}_j^*(\alpha \mathbf{p}) = \mathbf{y}_j^*(\mathbf{p}) \quad \text{e} \quad \pi^*(\alpha \mathbf{p}) = \alpha \pi^*(\mathbf{p})$$

Lei da oferta

$$[\mathbf{y}_j^*(\mathbf{p}') - \mathbf{y}_j^*(\mathbf{p}'')] \cdot (\mathbf{p}' - \mathbf{p}'') \leq 0$$

Convexidade da função de lucro

$$\forall 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \pi_j^*[\alpha \mathbf{p}' + (1 - \alpha) \mathbf{p}'] \leq \alpha \pi_j^*(\mathbf{p}') + (1 - \alpha) \pi_j^*(\mathbf{p}'')$$

Lema de Hotelling

$$\nabla \pi_j^*(\mathbf{p}) = \mathbf{y}_j^*(\mathbf{p})$$