Minimização de custos

Roberto Guena de Oliveira
USP

Sumário

A função de custo

A função de custo é uma função que associa a cada cada quantidade de produto y, o custo total (CT) mímimo no qual a firma deve incorrer para produzir essa quantidade. Evidentemente, esse custo depende, além da quantidade produzida, dos preços dos insumos de produção. Assim, no caso em que há apenas dois insumos de produção, z_1 e z_2 , com preços w_1 e w_2, a função de custo terá a forma

$$CT = c(w_1, w_2, q).$$

A função de custo de curto prazo

Caso um ou mais fatores de produção sejam fixos (curto prazo), a função de custo também terá por argumento a quantidade do fator de produção que é mantido fixo. Por exemplo, caso z_2 seja mantido fixo em $\overline{z_2}$, então a função de custo (de curto prazo) terá a forma

$$CT = c(w_1, w_2, q, \overline{z_2}).$$

Custos fixo e variável

O custo total (CT) de uma empresa pode ser dividido em

Custo Variável , $CV(w_1, w_2, q, \overline{z_2})$, parcela do custo correspondente à contratação de fatores variáveis.

Custo Fixo , (CF), parcela do custo correspondente à contratação de fatores fixos. Caso todos os fatores de produção sejam variáveis, então o custo fixo será nulo e o custo total coincidirá com o custo variável.

Portanto temos,

$$CT = CV + CF$$

A função de custo com apenas um insumo variável

Suponha uma firma que produza empregando apenas dois insumos de produção, z_1 e z_2, sendo que o segundo insumo é empregado em quantidade fixa $z_2 = \overline{z_2}$. Seja $q = f(z_1, z_2)$ a sua função de produção. Então a função de custo de curto prazo dessa empresa será dada por

$$c(w_1, w_2, q, \overline{z_2}) = w_1 z_1(q, \overline{z_2}) + w_2 \bar{z}[2]$$

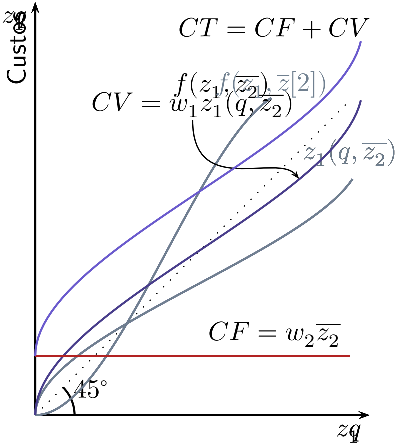
na qual $z_1(q, \overline{z_2})$ é uma função definida por

$$f(z_1(q, \overline{z_2}), \overline{z_2}) = q.$$

$w_1 z_1(q, \overline{z_2})$ é o custo variável. $w_2 \overline{z_2}$ é o custo fixo.

Derivação da função de custo com um insumo variável

1. Inverta a função de produção $f(z_1, \overline{z_2})$ para encontrar a função $z_1(q, \overline{z_2})$.
2. $CV = w_1 z_1(q, \overline{z}[2])$.
3. $CF = w_2 \overline{z_2}$.
4. $CT = c(w_1, w_2, q, \overline{z_2})$
   $= w_2 \overline{z_2} + w_1 z_1(q, \overline{z_2})$



Exemplo

Determine a função de custo de curto prazo de uma empresa cuja função de produção é $f(z_1, z_2) = \sqrt{z_1 z_2}$, sabendo que o fator de produção 2 é empregado em quantidade fixa $z_2 = \overline{z_2}$.

Exercício

Determine a função de custo de curto prazo para as seguintes funções de produção considerando o emprego fixo do fator de produção 2 em $z_2 = \overline{z_2}$.

1. $f(z_1, z_2) = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2}$;
2. $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2$;
3. $f(z_1, z_2) = z_1 z_2$;
4. $f(z_1, z_2) = \ln(1 + z_1) + \ln(1 + z_2)$.

O problema de minimização de custos mais de um fator variável

No caso geral com mais de um fator variável, a função de custo é obtida através da solução do seguinte problema:

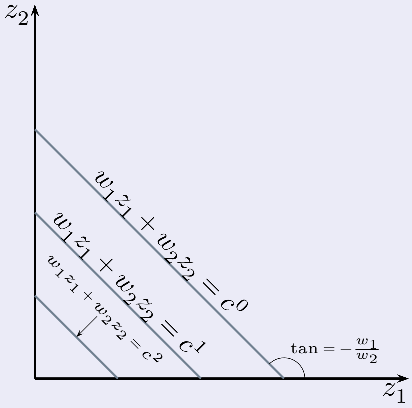
$$\min_{z_1,\ldots,z_\ell} \; w_1 z_1 + w_2 z_2 + \ldots + z_\ell$$
$$\text{tal que } f(z_1,\ldots,z_\ell) \geq q \quad \text{e} \quad z_1,\ldots,z_\ell \geq 0$$

notas

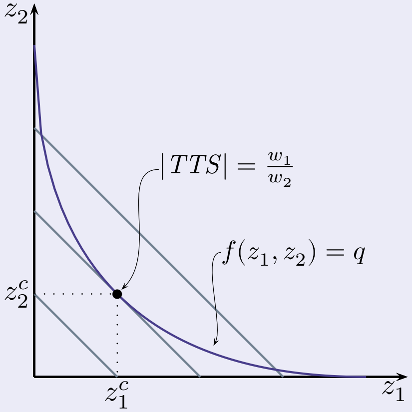
- As quantidades dos isumos que resolvem esse problema são chamadas demandas condicionadas ou contingentes desses insumos, sendo notadas por $z_h^c(w_1,\ldots,w_\ell,q)$.
- A função de custo será dada por
$$c(w_1,\ldots,w_\ell,q) = w_1 z_1^c(w_1,\ldots,w_\ell,q) + \ldots + w_\ell z_\ell^c(w_1,\ldots,w_\ell,q)$$

Solução gráfica: dois insumos variáveis

Curvas de isocusto



Solução



Minimização de custos: solução matemática

O problema

$$\min_{z_1,\dots,z_\ell} w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots + w_\ell z_\ell$$

$$\text{tal que } f(z_1,\dots,z_\ell) \geq q \quad \text{e} \quad z_1,\dots z_\ell \geq 0$$

O lagrangeano

$$\mathscr{L} = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots + w_\ell z_\ell - \lambda\left[f(z_1,\dots,z_\ell) - q\right] - \sum_{h=1}^{\ell} \mu_h z_h$$

Condições de 1ª ordem além das impostas pelas restrições

$$w_h - \lambda \frac{\partial f(z_1,\dots,z_\ell)}{\partial z_h} - \mu_h = 0 \quad \text{e} \quad z_h\left[w_h - \lambda \frac{\partial f(z_1,\dots,z_\ell)}{\partial z_h}\right] = 0$$

Exemplo: função de produção Cobb-Douglas

Função de produção:

$$f(z_1, z_2) = z_1^{\alpha} z_2^{\beta}$$

Condições de primeira ordem:

$$\begin{cases} f(z_1, z_2) = q & \Rightarrow \quad z_1^{\alpha} z_2^{\beta} = q \\ |TTS| = \dfrac{w_1}{w_2} & \Rightarrow \quad \dfrac{\alpha}{\beta} \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{w_1}{w_2} \end{cases}$$

Exemplo: função de produção Cobb-Douglas

As demandas condicionais:

$$z_1(w_1, w_2, q) = q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{w_2}{w_1}\right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

$$z_2(w_1, w_2, q) = q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\frac{\beta}{\alpha}\frac{w_1}{w_2}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

A função de custo:

$$c(w_1, w_2, q) = w_1 z_1(w_1, w_2, q) + w_2 z_2(w_1, w_2, q)$$

$$= q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \frac{\alpha+\beta}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}$$

Propriedades:

- O multiplicador de Lagrange associado ao problema de minimização de custo pode ser interpretado como o custo marginal, isto é

$$\lambda = \frac{\partial c(w_1, \ldots, w_2, q)}{\partial q}$$

- A função de custo é não decrescente em relação aos preços dos insumos e em relação ao produto.
- A função de custo é côncava em relação aos preços dos insumos
- (Lema de Shephard) Caso a função de custo seja diferenciável em relação ao preço do insumo i, teremos

$$\frac{\partial c(w_1, \ldots, w_2, q)}{\partial w_h} = z_h^c(w_1, \ldots, w_2, q)$$

Exercício

Encontre as funções de custo associadas às seguintes funções de produção:

1. $f(z_1, z_2) = \sqrt{z_1 z_2}$;
2. $f(z_1, z_2) = \ln(z_1 + 1) + \ln(z_2 + 1)$;
3. $f(z_1, z_2) = \min\{z_1, z_2\}$;
4. $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2$.

Nota:

Quando se supõe os preços dos fatores de produção são mantidos inalterados, é comum notar a função de custo simplesmente por

$$c(q).$$

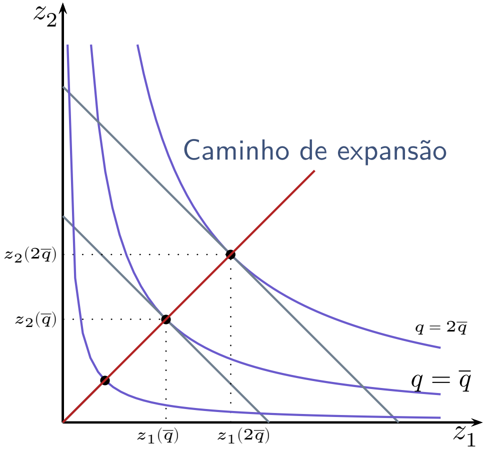
De modo análogo, as funções de demanda condicionais pelos insumos de produção são notadas por

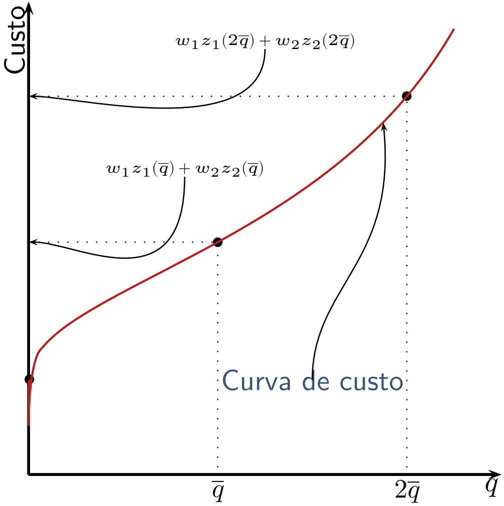
$$z_1^c(q) \qquad \text{e} \qquad z_2^c(q)$$

ou ainda, simplesmente,

$$z_1(q) \qquad \text{e} \qquad z_2(q)$$

Caminho de expansão e curva de custo





Sumário

Custos unitários

Custo Médio (CM)

$$CM = \frac{CT}{q}$$

Custo Variável Médio (CVM)

$$CVM = \frac{CV}{q}$$

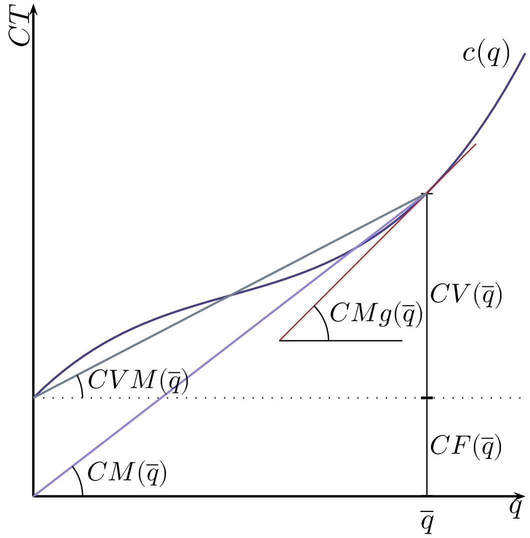
Custo Fixo Médio (CFM)

$$CFM = \frac{CF}{q}$$

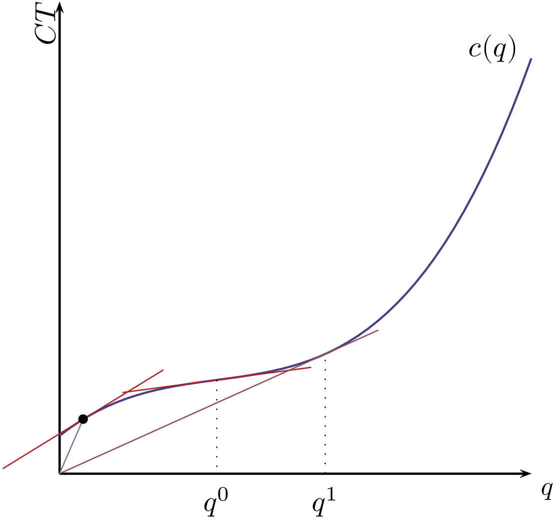
Custo Marginal (CMg)

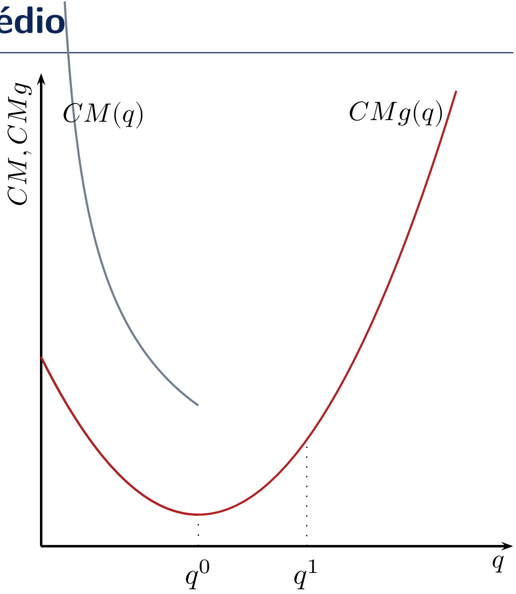
$$CMg = \frac{\partial CT}{\partial q} = \frac{\partial CV}{\partial q}$$

A geometria dos custos: inclinações

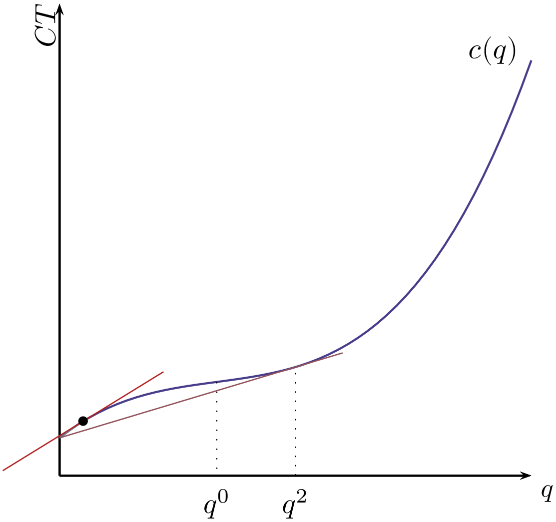


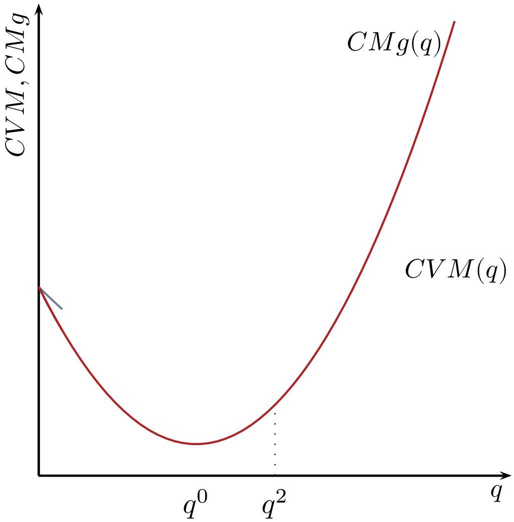
As curvas de custo marginal e médio



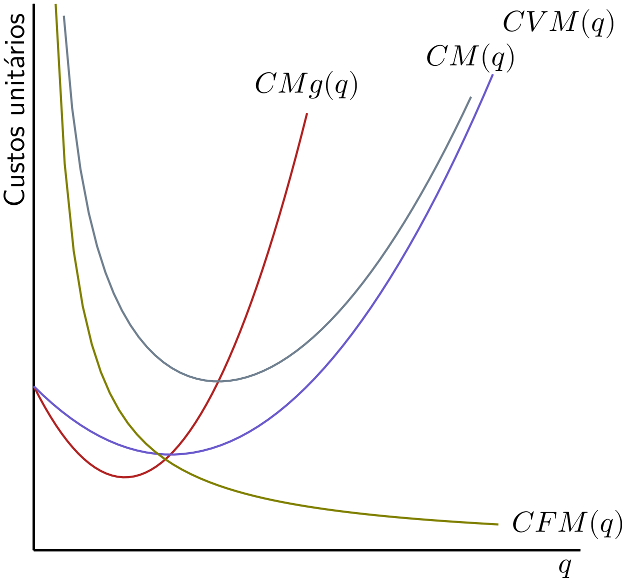


As curvas de custo marginal e variável médio





As curvas de custo unitário



Relações entre custos médios e custo marginal

médio:

$$\frac{dCM(q)}{dq} = \frac{d\frac{CT(q)}{q}}{dq} = \frac{yCMg - CT}{q^2} = \frac{CMg(q) - CM(q)}{q}$$

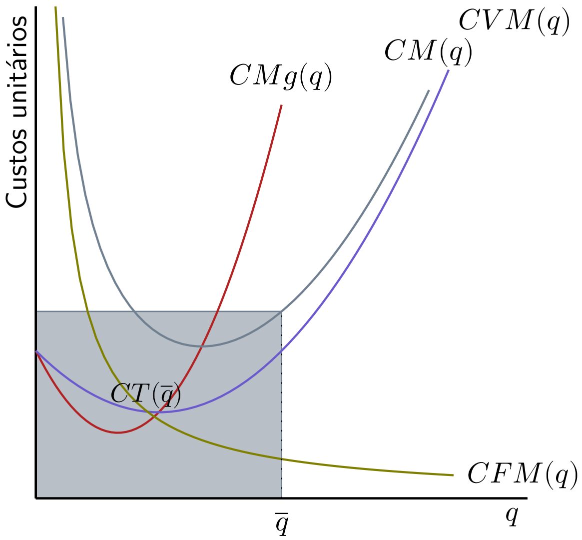
curva de custo variável médio:

$$\frac{dCVM(q)}{dy} = \frac{d\frac{CV(q)}{q}}{dy} = \frac{yCMg - CV}{q^2} = \frac{CMg(q) - CVM(q)}{q}.$$

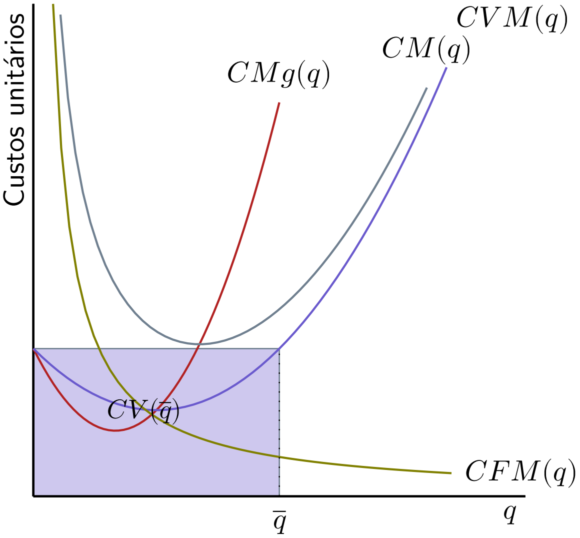
Valor do custo variável médio quando produção é nula:

$$\lim_{q\to 0} CVM = \lim_{q\to 0}\frac{CV(q)}{q} = \lim_{q\to 0}\frac{CV(q) - CV(0)}{q - 0} = CMg$$

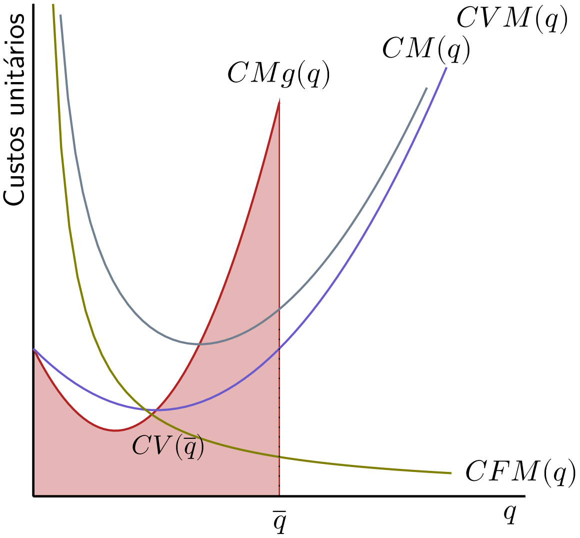
Geometria dos custos: áreas



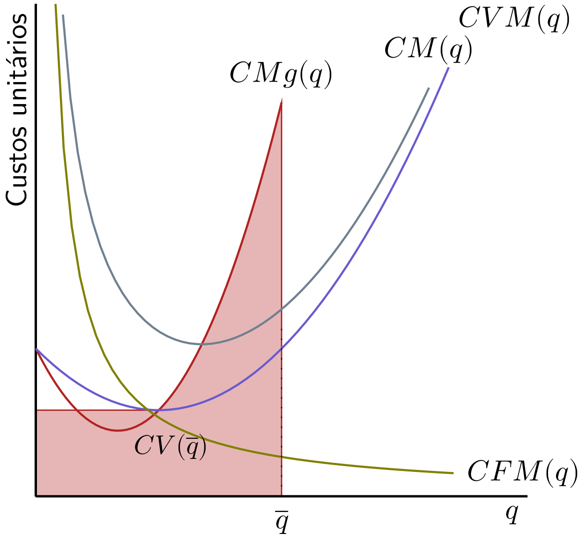
Geometria dos custos:áreas



Geometria dos custos:áreas



Geometria dos custos:áreas



Propriedades da função de custo

1. A função de custo é não decrescente em relação ao produto:

$$q' > q'' \Rightarrow c(w_1, w_2, q') \geq c(w_1, w_2, q'')$$

2. A função de custo é não crescente em relação aos preços dos insumos:

$$w_1' \geq w_1'' \text{ e } w_2' \geq w_2'' \Rightarrow c(w_1', w_2', q) \geq c(w_1'', w_2'', q)$$

3. A função de custo é côncava em relação aos preços dos insumos.
4. Lema de Shephard:

$$\frac{\partial c(w_1, w_2, q)}{\partial w_h} = z_h(w_1, w_2, q), \quad h = 1, 2$$

Sumário

Curto e longo prazos

Curto prazo

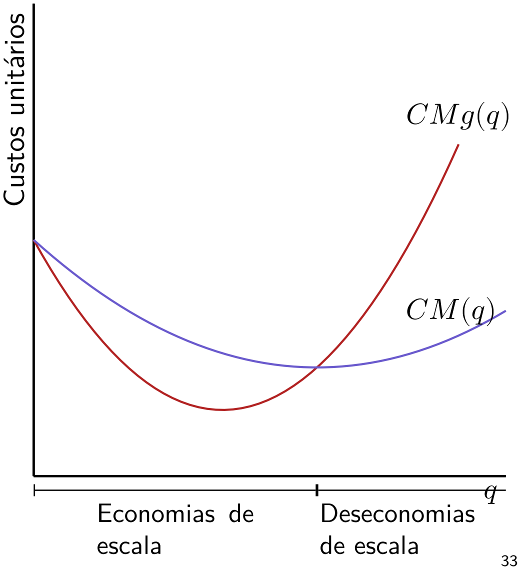
- Um ou mais fatores são fixos e, portanto, parte do custo é fixa.
- Custo total e custo variável são diferentes, mesmo ocorrendo com os custos médio e variável médio.

Longo prazo

- Não há fatores fixos: todos os custos são variáveis.
- Custo total e custo variável são iguais, mesmo ocorrendo com os custos médio e variável médio.

Economias de escala

Diz-se que uma função de custo de longo prazo apresenta economias de escala caso o custo médio seja decrescente em relação à produção.



Elasticidade produto do custo $\epsilon_{c,q}$

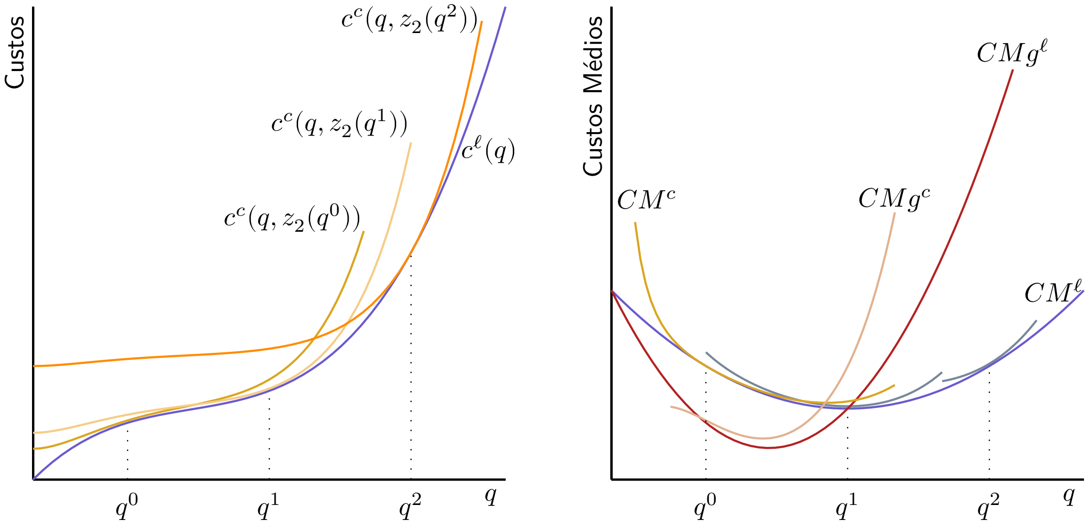
Trata-se de uma medida pontual para economias de escala definida por

$$\epsilon_{c,q} = \frac{dc(q)}{dq}\frac{q}{c(q)} = \frac{CMg(q)}{CM(q)}.$$

$$\epsilon_{c,q} = \frac{CMg(q)}{\frac{1}{q}\sum_{h=1}^{\ell} w_h z_{h(q)}} = \frac{1}{\sum_{h=1}^{\ell} \frac{w_h}{CMg}\frac{z_{h(q)}}{q}} = \frac{1}{\sum_{h=1}^{\ell} \frac{w_h}{\frac{w_h}{PMg_h}}\frac{z_{h(q)}}{q}} = \frac{1}{\sum_{h=1}^{\ell} \frac{PMg_h}{PM_h}}$$

Portanto, economias de escala e deseconomias de escala ocorrem quando há, respectivamente, rendimentos crescentes de escala e rendimentos decrescentes de escala.

As curvas de custo de longo e de curto prazos



Elasticidade de substituição σ

Definição

$$\sigma = \frac{d\frac{z_2}{z_1}}{d|TTS|} \frac{|TTS|}{\frac{z_2}{z_1}}$$

Interpretação

Em que percentual deve variar a relação $z_2(q)/z_1(q)$ caso o preço relativo w_1/w_2 varie 1%.

Dica para cálculo de elasticidade

Seja a função $q = f(X)$ e sejam $q = \ln q$ e $x = \ln X$. Então

$$e^q = f(e^x) = f(X) \text{ ou } q = \ln f(e^x) = \ln f(X).$$

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \ln f(X)}{dx} = \frac{df(X)}{dX}\frac{dX}{dx} = \frac{df(X)}{dX}\frac{X}{f(X)} = \epsilon_{q,X}.$$

Portanto, toda elasticidade pode ser medida como a derivada do logaritmo de uma variável em relação ao logaritmo de outra variável.

Exemplo: função de produção Cobb-Douglas

$$
\begin{aligned}
f(z_1, z_2) &= z_1^{\alpha} z_2^{\beta} \\
|TTS| &= \frac{\alpha}{\beta} \frac{z_2}{z_1} \\
\ln |TTS| &= \ln \frac{\alpha}{\beta} + \ln \frac{z_2}{z_1} \\
\Rightarrow \ln \frac{z_2}{z_1} &= \ln |TTS| - \ln \frac{\alpha}{\beta} \\
\sigma &= \frac{d \ln \frac{z_2}{z_1}}{d \ln |TTS|} = 1
\end{aligned}
$$

Exemplo: função de produção CES

$$f(z_1, z_2) = A\left(az_1^\rho + (1-a)z_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

$$|TTS| = \frac{a}{1-a}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{1-\rho}$$

$$\ln|TTS| = \ln\frac{a}{1-a} + (1-\rho)\ln\frac{z_2}{z_1}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{z_2}{z_1} = \frac{\ln|TTS| - \ln\frac{a}{1-a}}{1-\rho}$$

$$\sigma = \frac{d\ln\frac{z_2}{z_1}}{d\ln|TTS|} = \frac{1}{1-\rho}$$